Hertentamen Quantumfysica II. 27 augustus 1997

Ten geleide:

- Aanvang 13.30, einde 16.30.
- Werk rustig en lees de opgave steeds *nauwkeurig* door.
- Begin elke opgave op een nieuw vel en vermeld op elk vel uw naam en collegekaart nummer!
- Hulpmiddelen, behalve schrijfgerei, zijn *niet* toegestaan. Dus geen boeken, calculators, laptops, etc.

Veel succes!

1. Niet wisselwerkende deeltjes

Beschouw een deeltje in een 3-dimensionale harmonische oscillator potentiaal:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2. \tag{1}$$

We beginnen met het oplossen van het 1-deeltje probleem.

a. Los de stationaire Schrödingervergelijking op in Cartesische coordinaten, d.w.z. geef de golffunctie in termen van de eigenfuncties van de 1-dimensionale oscillator.

b. Wat zijn de energie niveaus?

c. Wat is de ontaardingsgraad van de laagste drie niveaus?

Vervolgens beschouwen we de situatie van vier niet-wisselwerkende identieke deeltjes in bovenstaande potentiaal.

d. Bereken de minimale energie van het 4-deeltjes systeem, voor het geval het om bosonen gaat.

e. Evenzo voor fermionen (met gelijkgerichte spin).

f. Geef de golffuncties van de toestanden onder (d.) en (e.) in termen van de 1-deeltjes golffuncties.

2. Metingen aan een deeltje met spin De ruimte die wordt opgespannen door de eigentoestanden van S_z en S^2 is uitstekend geschikt om enkele basisprincipes van de quantummechanica te illustreren.

a. Een meting van S_x levert $+\frac{1}{2}\hbar$. Wat is de toestand van het systeem onmiddellijk na deze meting? Meteen hierna wordt ook S_z gemeten. Wat zijn de mogelijke uitkomsten en de bijbehorende waarschijnlijkheden ? Bereken ook $\langle S_z \rangle$ op dat moment.

b. De Hamiltoniaan voor een vastgeprikt deeltje met spin dat in een magneetveld langs de z-as is geplaatst is: $H = \mu_B B \sigma_3$. Los de Schrödingervergelijking op.

c. Op $t = 0$ is het systeem in de eigentoestand van S_x bij eigenwaarde $+\frac{1}{2}\hbar$. Het systeem evolueert in de tijd volgens de Hamiltoniaan in onderdeel (b). Wat is de toestand op tijdstip $t = t_1$?

d. Op $t = t_1$ wordt S_x opnieuw gemeten. Wat zijn de mogelijke uitkomsten en de bijbehorende waarschijnlijkheden?

e. Wat had men gevonden als op $t = t_1$ de grootheid S_z gemeten was ? Verklaar het karakteristieke verschil met S_x.

3. Het Zeeman-effect

Het Zeeman-effect is het opsplitsen van spectraallijnen ten gevolge van het aanleggen van een extern magnetisch veld. We willen een kwantitatieve beschrijving geven van het Zeeman-effect. Daartoe bestuderen we allereerst een atoom **zonder** dat er een extern magneetveld is. Het atoom kan beschreven worden als het electron (met massa μ) in een centrale potentiaal $V(r)$ ten gevolge van het proton in de oorsprong.

a. Geef de Hamiltoniaan en eventuele symmetrie operatoren.

De tijdonafhankelijke Schrödingervergelijking voor het atoom heeft de volgende vorm in bolcoördinaten:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi(r,\theta,\phi) - \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)\Psi(r,\theta,\phi) + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\Psi(r,\theta,\phi) = 0 \tag{2}$$

met de impulsmoment operator

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})\right] \tag{3}$$

Merk op dat L^2 niet van r afhangt.

b. Schrijf de golffunctie als $\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta,\phi)$, pas scheiding van variabelen toe, en geef de differentiaalvergelijking voor $\Theta(\theta,\phi)$ in termen van L^2. Voor deze opgave heb je de expliciete vorm van L^2 niet nodig.

We laten nu het radiële deel van de golffunctie buiten beschouwing. De operatoren L^2 en L_z hebben gemeenschappelijke eigenfuncties Y_{lm}.

c. Waarom is er zo'n gemeenschappelijke basis van eigentoestanden? Wat zijn de bijbehorende eigenwaarden van L^2 en L_z? Welke waarden kunnen ze aannemen?

d. We kiezen een vaste l, wat is de ontaarding van het bijbehorende energie niveau E_l?

Vervolgens leggen we een magnetisch veld aan. Dit betekent dat er een interactie term in de Hamiltoniaan verschijnt van de volgende vorm:

$$H_{int} = \frac{e}{2\mu c}\vec{B}\cdot\vec{L}. \tag{4}$$

We zetten het $\vec{B}$-veld in de z-richting.

e. Laat zien dat het energie niveau E_l uit onderdeel (d.) opsplitst. Bereken de verschillen tussen de nieuwe niveaus en het oorspronkelijke energie niveau E_l.

-o-o-o- Einde -o-o-o-