Opgaven Quantum Fysica II
Week 9: Hall Effecten

8 maart 1999

Inleveren voor 12:00 uur op maandag 15 maart bij de portier van de Diamantslijperij. Bij problemen: Ronald van Elburg, tel.(525)5975, Martijn Wubs, tel. (525)5646 of Joost Slingerland, tel. (525)5920.

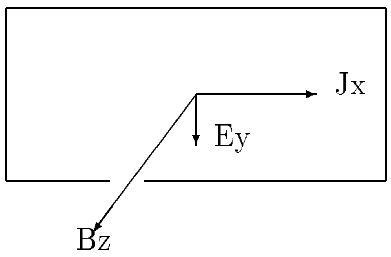
1 Inleiding

In de kwantummechanica worden nog steeds nieuwe ontdekkingen gedaan en nieuwe toepassingen gevonden. In dit college zijn al enkele van die nieuwe ontwikkelingen de revue gepasseerd: neutrino-oscillaties en quantum dots. Maar als je nu de belangrijkste nieuwe ontdekking in de kwantummechanica moet noemen, dan is dat toch het *fractionele quantum Hall effect*. De experimentatoren en de theoreticus die dit effect gemeten en beschreven hebben, kregen in 1998 samen de Nobelprijs voor de natuurkunde.
Doel van deze som is een (begin van) een idee te krijgen wat dat fractionele quantum Hall effect is en hoe het verklaard wordt. We volgen de geschiedenis van de Hall-effecten om bij de Nobelprijs van vorig jaar uit te komen: in paragraaf 2 gaat het over het *klassieke Hall effect*. Daar is dus nog niets kwantums aan. In de derde paragraaf leer je wat het *quantum Hall effect* is en waarin het verschilt van het klassieke effect. Dat doe je aan de hand van de bijgeleverde tekst en opgaven van J.P. Eisenstein. Het (gewone) quantum Hall effect is wel het *integer* quantum Hall effect gaan heten toen het *fractionele quantum Hall effect* was ontdekt en verklaard. Over dit laatste effect kun je lezen in de bijgeleverde bekendmaking van het Nobelcomité. Het is aan te raden eerst alles door te lezen voor je met rekenen begint.

2 Het klassieke Hall Effect en de Magneto weerstand

Deze opgave is een vertaling en bewerking van pagina 11 t/m 14 uit het boek 'Solid State Physics' van Ashcroft en Mermin. We zijn overgegaan op SI-eenheden.

In 1879 probeerde E.H. Hall uit te zoeken of de kracht op een stroomvoerende draad in een magneetveld op de *hele* draad werkt of alleen op bewegende de ladingsdragers. Hij verwachtte het laatste en deed een experiment gebaseerd op het volgende argument:
"If the current of electricity in a fixed conductor is itself attracted by a magnet, the current should be drawn to one side of the wire, and therefore the resistance should be increased."
Zijn pogingen deze extra weerstand te meten mislukten, maar Hall beschouwde deze mislukking niet als een definitief antwoord op zijn vraag, want:
"The magnet may tend to deflect the current without being able to do so. It is evident that in this case there would exist a state of stress in the conductor, the electricity pressing, as it were, toward a side of the wire."
Deze spanning ("stress") in de draad zou zich moeten voordoen als een electrische potentiaal over de draad loodrecht op de stroomrichting. Het lukte Hall dit potentiaalverschil te meten. Daarom heet het tegenwoordig de *Hall-spanning.*
Het door Hall uitgevoerde experiment is afgebeeld in figuur 2 van de opgave van J.P. Eisenstein. Voor onze keuze van x, y, z verwijs ik naar de onderstaande figuur.



Figuur 1: x,y,z conventies

Een elektrisch potentiaalverschil wordt aangelegd in de x-richting en daardoor gaat er in de draad een stroom J_x lopen. Ook wordt een magnetisch veld aangelegd in de positieve z-richting, waardoor de electronen een Lorentz-kracht voelen

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B} \tag{1}$$

die tracht de electronen af te buigen in de negatieve y-richting. Let op: de electronen bewegen zich tegen de richting van de electrische stroom in. Doordat de electronen zich in de draad bevinden, kunnen ze niet ver opzij bewegen; al snel stuiten ze op de buitenkant van de draad. Daar verzamelen ze zich en bouwen een elektrisch veld op dat verder afbuigen van electronen tegengaat. Het verzamelen van electronen stopt op het moment dat het elektrisch veld precies de Lorentz-kracht compenseert. Vanaf dat moment loopt de stroom alleen nog in de x-richting. Er zijn nu twee belangrijke grootheden:

- **Magneto Weerstand:** De verhouding tussen het veld E_x parallel aan de draad en de stroomdichtheid J_x wordt de magneto-weerstand $\rho(B)$ genoemd:

$$\rho(B) = \frac{E_x}{J_x} \tag{2}$$

- **Hall Coëfficient:** Deze andere belangrijke grootheid is gerelateerd aan de Hall-spanning E_y. Omdat de Hall-spanning de Lorentz-kracht compenseert, verwachten we dat E_y evenredig is met het magneetveld B en met de stroom J_x door de draad. In de Hall-coëfficiënt is deze evenredigheid al 'ingebouwd':

$$R_H^{'} = \frac{E_y}{J_x B} \tag{3}$$

We hebben bovenstaande R_H maar even een accentje meegegeven om een veel voorkomende verwarring te voorkomen, want er is *nog* een grootheid die *ook* met R_H wordt aangeduid in de literatuur (ook in de opgave van Eisenstein!) en dat is de

- **Hall Weerstand:**

$$R_H = \frac{E_y}{J_x} \tag{4}$$

Om de Hall-coëfficiënt en de magneto weerstand te bepalen, gaan we eerst de stroomdichtheden J_x en J_y uitrekenen in een electrisch veld $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ met willekeurige componenten E_x en E_y en een magnetisch veld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$.

a. Geef de kracht $\vec{F}$ op een elektron met een snelheid $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ die zich in de bovenstaande twee velden beweegt.

De electronen in een geleider botsen van tijd tot tijd met de ionen in het rooster; de karakteristieke tijd tussen twee botsingen is τ. Als er geen veld wordt aangelegd bewegen de electronen in alle richtingen. De gemiddelde snelheid $\vec{v}$ is dan nul en de snelheden zijn verdeeld volgens een thermische verdeling. Als we nu een klein krachtveld aanleggen, dan zal de gemiddelde impuls $\vec{p}$ zich als volgt gaan gedragen:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} + \vec{F} \tag{5}$$

Als we aannemen dat de stroom constant is dan is het linkerlid van deze vergelijking nul. Met behulp van bovenstaande vergelijking kunnen we nu relaties vinden tussen de gemiddelde impuls en het elektrisch veld.

b. Druk E_x en E_y uit in de x en y componenten van de impuls, gebruik voor de electron massa het symbool m_e en gebruik waar mogelijk de cyclotron frequentie $w_c = \frac{eB}{m_e}$.

c. Vermenigvuldig de vergelijkingen uit onderdeel b. met $\frac{-ne\tau}{m_e}$, n is hier de electronendichtheid, herschrijf de vergelijkingen nu zo dat je de stroomdichtheden herkent (gebruik de afkorting $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$).

De Hall-spanning $E_{y,Hall}$ is bepaald door de eis dat er geen stroom meer loopt in de transversale richting (hier de y-richting).

d. Bereken de Hall-spanning en bepaal de Hall-coëfficiënt.

e. Teken de Hall-spanning als functie van het magneetveld bij vaste waarde van $J_x \neq 0$.

f. Bereken de magneto weerstand.

3 Het (integer) quantum Hall effect

Je hebt in de vorige paragraaf de eerste van de opgaven van J.P. Eisenstein opgelost. In deze paragraaf wordt je gevraagd ook de opgaven 2,3 en 4 uit het stuk van Eisenstein te maken. Je werkt er dan naartoe dat je bij opgave 4 begrijpt waarom de Hall weerstand gekwantiseerd is in 2D electronsystemen.

4 Het fractionele quantum Hall effect

In de tekst van Eisenstein werd al iets gezegd over het fractionele quantum Hall effect. In de bekendmaking van het Nobelcomité lees je er meer over. De theoretische verklaring van het effect is bijzonder lastig en daar komen we nu helemaal niet aan toe. Het belangrijkste is dat je het grote theoretische verschil tussen het integer en het fractionele Hall effect inziet: het integer effect kon je verklaren door ééndeeltjes energieniveaus van electronen in een sterk magneetveld te berekenen. Dat die electronen ook andere electronen om zich heen hebben waarmee ze wisselwerken (Coulomb afstoting), kan verwaarloosd worden om het integer effect te verklaren. Het fractionele quantum Hall effect kan echter alleen verklaard worden door *wel* rekening te houden met die Coulomb-wisselwerking tussen electronen. De theoreticus Laughlin heeft dat op een geheel nieuwe manier gedaan en daarvoor heeft hij de Nobelprijs gekregen.
Misschien zie je al een overeenkomst met de opgave over quantum dots: ook daar werd een ééndeeltjes Schrödingervergelijking opgelost om gekwantiseerde energieniveaus te bepalen. Ook daar werd de Coulomb-afstoting tussen de electronen eerst verwaarloosd. Maar er is ook een belangrijk verschil met de dots: voor wat betreft de electron-tunnel eigenschappen van kwantum dots bleek het mogelijk om de electron-electron interactie effectief te beschrijven met een oplaadcapaciteit van de dot. Er bestaat echter niet zo'n effectieve beschrijving van de electron-electron wisselwerking om het fractionele quantum Hall effect te verklaren. Daarvoor was het werk van Laughlin nodig.

Als je meer wilt weten over Hall-effecten, dan kun je kijken naar de referenties van het artikel van Eisenstein, of naar de niet bijgeleverde extra informatie van de Nobel-website. En je kunt ook de webpage van Boris Skoric van onze eigen UvA eens opzoeken:

`http://soliton.wins.uva.nl/~skoric/quantumHall.html`