Opgaven Quantum Fysica II: Week 8

1 maart 1999

Inleveren voor 12:00 uur op maandag 7 maart bij de portier van de Diamantslijperij. Bij problemen: Ronald van Elburg, tel.(525)5975, Martijn Wubs, tel. (525)5646 of Joost Slingerland, tel. (525)5920.

Opgave 8.1 Spin

Gegeven zijn de Pauli-matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

en de Hamiltoniaan voor een neutraal deeltje met spin $\frac{1}{2}$ in een magnetisch veld $\vec{B}$:

$$H = -\frac{e\hbar}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\sigma} = -\mu\vec{B}\cdot\vec{\sigma}, \tag{2}$$

met μ het Bohr-magneton. We beginnen in een situatie waarbij het magneetveld nul is. En het deeltje zit in een eigentoestand van de spinoperator S_x met eigenwaarde $+\frac{\hbar}{2}$.

a. Wat zijn de mogelijke uitkomsten als we de spin in de y-richting meten?

b. En wat zijn de mogelijke uitkomsten als we direct daarna weer de spin in de x-richting meten?

Bij deze laatste meting wordt weer de waarde $+\frac{\hbar}{2}$ gevonden. Op $t = 0$ wordt een magneetveld van sterkte B in de z-richting aangelegd.

c. Bereken de toestand na een tijdje T.

d. Wat is de kans dat we daarna bij een meting van de spin in de x-richting weer de waarde $+\frac{\hbar}{2}$ vinden?

e. Wat is de verwachtingswaarde voor een meting van de spin in de y-richting?

Opgave 8.2: Fermionen en bosonen met spin

In deze opgave gaan we uitzoeken hoe we de spins van verschillende deeltjes kunnen op tellen, en hoe we vervolgens de statistiek eigenschappen verwerken in mogelijke eindtoestanden. We beginnen eenvoudig met 2 identieke deeltjes zonder spin. Deze twee deeltjes hebben geen interactie en bevinden zich in een een-dimensionale harmonische oscillator (zie 2.3 Griffiths voor de benodigde info over de 1D Harm. Osc. , gebruik Griffiths labelling van de één deeltjestoestanden [zie vgl 2.50, pagina 35]).

a. Geef de laagste energie toestand en de bij behorende energie voor geval de twee deeltjes bosonen zijn.

b. Geef de laagste energie toestand en de bij behorende energie voor geval de twee deeltjes fermionen zijn.

In geval [b.] hebben we eigenlijk iets onnatuurlijks gedaan we hebben namelijk de spin van de deeltjes verwaarloosd terwijl we weten dat fermionen half-tallige spin hebben. Daarom gaan we nu kijken hoe we spins kunnen combineren (optellen) en daarna kijken we hoe we dat resultaat consistent kunnen maken met de statistiek van de deeltjes. We kijken nu eerst naar twee niet identieke deeltjes met spin $s_i = \frac{1}{2}$. De spin operatoren $S_i, S_i^z, S_i^{\pm}$ werken op de toestanden deeltje i; $S_i^2|s_i, m_i\rangle = \hbar^2 s_i(s_i+1)|s_i, m_i\rangle$. We kunnen nu ook voor het systeem van de twee deeltjes spin-operatoren met bijbehorende eigentoestanden definiëren:

$$
\begin{aligned}
S^2_{systeem} &= (S_1 + S_2)^2 \quad , \qquad & S^2_{systeem}|S, M\rangle &= \hbar^2 S(S+1)|S, M\rangle \\
S^z_{systeem} &= (S^z_1 + S^z_2) \quad , \qquad & S^z_{systeem}|S, M\rangle &= \hbar M|S, M\rangle
\end{aligned}
\tag{3}
$$

c. Wat zijn de mogelijke eigenwaarden M van S^z?

d. Beredeneer dat moet gelden: $|S = 1, M = 1 >= |m_1 = 1/2, m_2 = 1/2 >$
Merk op dat deze toestand symmetrisch is onder verwisseling van deeltje 1 en 2.

We definieren nu de operator $S^-_{\text{tot}} = S^-_1 + S^-_2$ met:

$$S^-_1|m_1 >= N|m_1 - 1 >$$

Waarbij N een normeringsconstante is. Door deze operator herhaaldelijk op $|S = 1, M = 1 >$ te laten werken kunnen we de deelruimte $|S = 1, M = 1 >$; $|S = 1, M = 0 >$; $|S = 1, M = -1 >$ opbouwen.

e. Voer de bovenbeschreven procedure uit en druk deze toestanden uit in lineaire combinaties van de $|m_1, m_2 >$ toestanden.

We hebben nu de deelruimte S=1 gevonden. De deelruimte met S=0 (en dus M=0) staat hier loodrecht op (Hint, hint!).

f. Vind de toestand $|S = 0, M = 0 >$. Controleer nu dat de twee deelruimtes de volledige Hilbert ruimte opspannen.

In de onderdelen a. en b. hebben we uitgezocht hoe fermionische en bosonische twee deeltjes toestanden geconstrueerd kunnen worden. In de onderdelen c. t/m f. hebben we bestudeerd hoe spins van twee deeltjes moet worden opgeteld. Nu willen we beide aspecten combineren en de twee deeltjes toestanden bepalen die voldoen aan de spin statistiek relatie.

g. Neem aan dat de twee deeltjes identieke fermionen zijn in de één dimensionale harmonische oscillator met een zo laag mogelijke energie, geef de laagste energietoestand voor zowel de $|S = 0, M = 0\rangle$ als de $|S = 1, M = 0\rangle$ toestand

h. Neem nu weer aan dat de deeltjes identieke fermionen zijn in de één dimensionale harmonische oscillator maar nu met een energie $E = 3\hbar\omega$, geef de toestanden voor zowel de $|S = 0, M = 0\rangle$ als de $|S = 1, M = 0\rangle$ toestand. Let op, er is in dit geval sprake van ontaarding.