Opgaven Quantum Fysica II: Week 6

17 februari 1999

Inleveren voor 12:00 uur op maandag 22 februari bij de portier van de Diamantslijperij. Bij problemen: Ronald van Elburg, tel.(525)5975, Martijn Wubs, tel. (525)5646 of Joost Slingerland, tel. (525)5920.

Opgave 6: Een illustratief probleem: Symmetrieën van 2 dimensionale harmonische oscillatoren.

In de beschrijving van fysische problemen spelen harmonische oscillatoren een sleutelrol, de reden hiervoor is dat kleine afwijkingen van een stabiele situatie meestal leiden tot harmonische oscillaties. Het oplossen van zo'n systeem is relatief eenvoudig daarom zullen wij het gebruiken om te laten zien hoe je symmetrieën kan benutten in de quantummechanica.

De isotrope oscillator, Klassiek

1. We beginnen klassiek. Beschouw de hamiltoniaan

$$H_0 = \frac{1}{2M}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}M\omega^2(x_1^2 + x_2^2) \tag{1}$$

   ω is hier de frequentie van de harmonische oscillator. Geef de Hamilton vergelijkingen.

2. De Hamilton vergelijkingen ontkoppelen als we de volgende lineaire combinaties gebruiken:

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_1 - i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_1 \\ a &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_1 + i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_1 \\ b^\dagger &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_2 - i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_2 \\ b &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_2 + i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_2 \end{aligned} \tag{2}$$

   Herschrijf de Hamilton vergelijkingen in termen van $a^{(\dagger)}, b^{(\dagger)}$. (Deze ontkoppeling gaat op dezelfde wijze als in het 1 dimensionale geval).

3. Los de in onderdeel 2 gevonden vergelijkingen op en ga na dat ze de verwachte oplossingen voor $x_1(t), x_2(t)$ opleveren.

De isotrope oscillator, Quantum

4. In het overeenkomstige quantummechanische probleem zijn x_i, p_i operatoren die aan de canonieke commutatie relaties voldoen:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j} \tag{3}$$
$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

   Leidt met behulp van de bovenstaande commutatie relaties de commutatie relaties van de ladderoperatoren a, $a^\dagger$, b en $b^\dagger$ af.

5. Herschrijf de Hamiltoniaan met behulp van de ladderoperatoren.

6. Om later in deze opgave de koppeling van de twee dimensionale harmonische oscillator aan het magneetveld te kunnen bestuderen voeren we de volgende transformatie van variabelen uit:

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a - ib)$$
$$B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a + ib)$$
$$A^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + ib^\dagger) \tag{6}$$
$$B^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger - ib^\dagger) \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

   Leidt de commutatie relaties voor deze nieuwe set van operatoren af uit de commuatie relaties van de oude. Laat verder zien dat $H = (A^\dagger A + B^\dagger B) + \hbar\omega$

7. De grond- of laagste energie eigentoestand $|0\rangle$ is gedefinieerd door zijn eigenschap dat hij geannihileerd wordt door de "trap-af" ladderoperatoren A en B:

$$A|0\rangle = B|0\rangle = 0 \tag{9}$$

   De geëxciteerde toestanden worden verkregen door de "trap-op" ladderoperatoren $A^\dagger$ en $B^\dagger$ herhaaldelijk op de grondtoestand te laten werken. Laat zien dat de toestand

$$|n_+, n_-\rangle = (A^\dagger)^{n_+}(B^\dagger)^{n_-}|0\rangle \tag{10}$$

   een eigentoestand is van de Hamiltoniaan. (Opmerking: Je ziet hieraan dat de operator algebra van de ladderoperatoren de "spectrum genererende" algebra is van het 2D harmonische oscillatorprobleem.)

8. Welke toestanden zijn ontaard en hoeveel ontaarde toestanden zijn er op een gegeven energieniveau?

9. De ontaarding van het spectrum doet vermoeden dat er symmetrieën bestaan waar we in het vervolg gebruik van kunnen maken. Beschouw de operatoren

$$L_z \equiv x_2 p_1 - x_1 p_2$$
$$\tag{11}$$

Schrijf L_z (de baanimpulsmoment-operator) in termen van de operatoren $A, A^\dagger, B$ en $B^\dagger$.

De operatoren $L_+,\ L_-$ worden gegeven door

$$\begin{aligned} L_+ &\equiv \frac{A^\dagger B}{\omega} \\ L_- &\equiv \frac{B^\dagger A}{\omega} \end{aligned} \tag{12}$$

beredeneer dat de operatoren L_z, L_+ en L_- commuteren met H en dus tijdonafhankelijk zijn.

10. Bepaal nu de commutatie relaties van de L-operatoren. Welke bekende commutatie relaties vind je? (Opmerking: deze symmetrie is 'toevallig' of 'dynamisch', aangezien de symmetrie niet meteen uit de ruimtelijke symmetrie van het systeem volgt ,dwz. uit de SO_2 symmetrie van rotaties in het x_1, x_2-vlak.)

11. We hebben nu 'A'-excitaties en 'B'-excitaties die niet met een richting in het vlak corresponderen, maar met een draai-richting (met de klok mee of ertegenin). Een toestand is aan te geven met het aantal excitaties in de verschillende draairichtingen: $|n_+, n_-\rangle$. Diezelfde toestand is aan te geven door $|n_{tot} = n_+ + n_-, l = n_+ - n_-\rangle$: het eerste getal stelt het totale aantal excitaties voor en het tweede getal het 'netto' aantal excitaties in positieve draairichting. Laat zien dat

$$\begin{aligned} L_z|n,l\rangle &= \hbar l|n,l\rangle, \\ H|n,l\rangle &= (n+1)\hbar\omega_0|n,l\rangle \\ L_+|n,n\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

12. Laat herhaaldelijk de operator L_- werken op $|n,n\rangle$. Wat zijn de eigenwaarden van H en L_z van de toestanden die je dan vindt? En wat is de kleinste eigenwaarde van L_z die je zo vindt? Teken het spectrum als stippen in het (E, l)-vlak.

13. Als je een magneetveld in de z-richting aanlegt, krijgt de Hamiltoniaan er twee termen bij waarvan één evenredig met L_z:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2M}(p_1^2 + p_2^2) + \left(\frac{1}{2}M\omega_0^2 + \frac{e^2B^2}{8Mc^2}\right)(x_1^2 + x_2^2) + \frac{eB}{2Mc}(x_2 p_1 - x_1 p_2) \\ &= (B^\dagger B + A^\dagger A + \hbar\Omega) - \frac{\omega_1}{\Omega}(B^\dagger B - A^\dagger A), \end{aligned} \tag{14}$$

waarin $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$ en $\omega_1 = eB/2Mc$ en $[B^\dagger, B] = [A^\dagger, A] = \hbar\Omega$. (Als je dit narekent, houd dan rekening met het feit dat in de definitie van a, b etcetera nu de frequentie Ω staat.) Laat zien dat de $|n,l\rangle$ nog steeds energie-eigentoestanden zijn. Beredeneer dat de operatoren $L_\pm$ geen symmetrie-operatoren meer zijn als $B \neq 0$. Teken weer in het (E, l)-vlak het spectrum, nu voor het geval dat $\omega_0 = \omega_1$.