Quantum Fysica II, opgavenset 4

2 feb 1999

Inleveren voor 12:00 uur op maandag 8 februari bij de portier van de Diamantslijperij.

Opgave 4.1: Het twee-dimensionale Kepler probleem

Het doel van de opgave is om het energie spectrum en de golffuncties te berekenen voor een deeltje met massa μ in de volgende potentiaal:

$$V = -\frac{Ze^2}{r} \tag{1}$$

met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dit vereist een aanzienlijke hoeveelheid rekenwerk. Het is aan te raden zeer nauwkeurig te werken! Aangezien $V = V(r)$ (centrale potentiaal) mogen we scheiding van variabelen toepassen:

$$\Psi(r, \phi) = \Phi(\phi)R(r). \tag{2}$$

a. Geef de Hamiltoniaan voor dit probleem in cirkel coordinaten (dus in r en ϕ). Bewijs dat $\Phi(\phi)$ van de vorm

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi} \tag{3}$$

is, met m een reele constante. (Hint: schrijf de Schrödinger vergelijking uit en breng de $r-$afhankelijkheid naar links en de $\phi-$afhankelijkheid naar rechts. Merk op dat beide zijden alleen gelijk kunnen zijn als ze constant zijn.) Gebruik de periodiciteit van ϕ en bepaal de mogelijke waarden van m.

b. Substitueer (3) in de Schrödinger vergelijking en leidt de differentiaal vergelijking voor $R(r)$ af.

Om nu de functie $R(r)$ te bepalen, voeren we een aantal handige manipulaties uit. Allereerst substitueren we:

$$R(r) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}}. \tag{4}$$

c. Schrijf de differentiaal vergelijking voor $R(r)$ om naar een differentiaal vergelijking voor $u(r)$. Voer de volgende herschaling uit: $r = \frac{\hbar^2}{\mu Z e^2}\rho \equiv a\rho$ en gebruik de afkorting: $\gamma^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}a^2$. Laat zien dat de differentiaal vergelijking voor $u(\rho)$ eruit ziet als:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(\frac{2}{\rho} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} - \gamma^2\right) u = 0 \tag{5}$$

Beschouw nu het asymptotisch gedrag van het deeltje. Voor $\rho \to \infty$ gedraagt het zich als een vrij deeltje.

d. Geef de vorm van $u(\rho)$ voor het geval dat $E > 0$. Hoe ziet het spectrum er dan uit? (Hint: schrijf eerst de differentiaal vergelijking op voor $u(\rho)$, in de limiet dat $\rho \to \infty$.)

e. Als $E < 0$ hebben we *gebonden toestanden*. Wat is de vorm van het spectrum, en wat is de vorm van $u(\rho)$? (Je hoeft dus nog niets expliciet te berekenen.) Bedenk dat de golffuncties ook op grote afstand van de oorsprong eindig moeten zijn.

We eisen dat ook voor $r \to 0$ de golffunctie eindig is, dus dat $u(0) = 0$.

f. Geef de differentiaal vergelijking voor $u(\rho)$ voor $\rho \to 0$. Neem aan dat $u(\rho) = \rho^\alpha$. Waarom moet $\alpha > 0$? Bewijs dat $\alpha = |m| + \frac{1}{2}$.

g.

Als we nu het asymptotische gedrag ($r \to \infty$ en $r \to 0$) expliciet aangeven, kunnen we de algemene oplossing voor $u(\rho)$ alsvolgt schrijven:

$$u(\rho) = e^{-\gamma\rho}\rho^{|m|+\frac{1}{2}}w(\rho). \tag{6}$$

g. Geef de differentiaal vergelijking voor $w(\rho)$. Wees duidelijk met haakjes a.u.b.

Om de differentiaalvergelijking voor w op te lossen substitueren we een machtreeks:

$$w(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \tag{7}$$

Door de sommatie voor verschillende termen te verschuiven kunnen we zorgen dat alle ρ's met dezelfde macht n in de som voorkomen. De coëfficiënt van ρ^n moet dan dus gelijk zijn aan 0. Hieruit volgt de volgende relatie voor de coëfficiënten:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\gamma(2n + 2|m| + 1) - 2}{(n + 1)(n + 2|m| + 1)} \tag{8}$$

h. Expandeer de functie $e^{2\gamma\rho}$ en laat zien dat daarvoor geldt dat $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2\gamma}{n}$. Bereken $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ voor $n \to \infty$ voor vergelijking (8). Geef de oplossing voor $u(\rho)$ in geval de expansie van $w(\rho)$ oneindig zou zijn. Hoe gedraagt deze functie (dus $u(\rho)$) zich voor $\rho \to \infty$? Conclusie?

i. Stel dat de expansie (7) afbreekt voor zekere n_0, dus $a_{n_0+1} = 0$, maar $a_{n_0} \neq 0$. Druk γ uit in deze n_0 en $|m|$. Gebruik de definitie van γ uit onderdeel (c.) en geef het energiespectrum, dat wil zeggen, de waarden van E_{n_0}.

j. Hersubstitueer tenslotte alle oplossingen en geef de golffuncties horend bij de verschillende energie niveaus E_{n_0}, dus de $\Psi_{n_0 m}(r, \phi)$. Bedenk dat $n_0 = 0, 1, 2, ...$ en $|m| = 0, 1, 2, ...$ Hint: gebruik de afkortingen γ en a zoals hierboven gedefinieerd.

k. Leid vergelijking (8) af.