Vraagstukken bij het college Quantumfysica II

2e trimester 1998-1999

Deze opgaven behoren bij het werkcollege Quantum Fysica II, '98-'99. De opgaven dienen elke week voor maandag 12.00 uur bij de portier van de Diamantslijperij te worden ingeleverd.

- De *'Tentamenregeling voor de 2e jaars vakken'* is van toepassing.
- U kunt alleen of in groepjes werken.
- Als u er niet uit komt, wacht dan niet tot het laatste moment. Ga eerst eens in de literatuur spitten; u vindt gegarandeerd aanknopingspunten. Lukt het dan nog niet, vraag dan één van de begeleiders.
- Overschrijven is niet in uw belang, samenwerken wel.

U kunt met uw vragen terecht bij:
Ronald van Elburg, tel.(525)5975, kamer nr. 386, e-mail elburg@phys.uva.nl
Martijn Wubs, tel. (525)5646, kamer nr. B45, e-mail wubs@phys.uva.nl
Joost Slingerland, tel. (525)5920, kamer nr. 356, e-mail slinger@phys.uva.nl,
allen in het gebouw aan de Valckenierstraat 65.

Opgaven Quantumfysica II: Week 1

Inleveren voor 12:00 uur op maandag 18 januari bij de portier van de Diamantslijperij. Bij problemen: Ronald van Elburg, tel.(525)5975, Martijn Wubs, tel. (525)5646 of Joost Slingerland, tel. (525)5920.

Opgave 1.1: De onzekere golfbal en het kerndeeltje.

a. We beschouwen een golfbal met een massa $m = 50$ g die zich met een snelheid van $v = 200$ km/ uur boven Aerdenhout voortbeweegt. De meetnauwkeurigheid is 0.01 m/s en we laten de onnauwkeurigheid in m buitenbeschouwing. Hoe groot is de minimale onzekerheid in positie t.g.v. van de kwantummechanische beginselen?

b. Met de onzekerheidsrelatie voor plaats en impuls kun je ook een (zeer ruwe) schatting maken van de grootte van kernpotentialen. Gegeven dat de kernpotentiaal ervoor zorgt dat een nucleon zich ergens binnen een gebiedje met een diameter van 10^{-15} m bevindt. Wat is dan de minimale onzekerheid in de impuls? Neem nu aan dat de grootte van de impuls van dezelfde orde is als de zojuist berekende impuls-onzekerheid. Bereken (in eV) hoe sterk de kernpotentiaal minimaal moet zijn om te voorkomen dat het nucleon de kern verlaat.

Opgave 1.2: Plaats- en impulsrepresentatie

a. Beschouw een deeltje in één dimensie in een potentiaal $V(x)$. Geef de tijdafhankelijke Schrödinger- vergelijking voor dit probleem. Geef ook de uitdrukking voor $\phi(p,t)$ (de golffunktie in de impulsrepresentatie) in termen van $\psi(x,t)$ (de golffunctie in de plaats-representatie). De twee golffuncties zijn elkaars Fouriergetransformeerden. Laat zien dat $\phi(p,t)$ voldoet aan de vergelijking

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(p,t) = \frac{p^2}{2m}\phi(p,t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp'\ \hat{V}(p-p')\phi(p',t) \tag{1}$$

waarbij $\hat{V}(p)$ de Fouriergetransformeerde is van de potentiaal $V(x)$. Je mag aannemen dat de golffunktie en z'n ruimtelijke afgeleide naar nul gaan op $+\infty$ en $-\infty$. Dat heb je nodig als je de eerste term in het rechterlid verkrijgen wilt door tweemaal partieel te integreren.

b. Druk $|\psi(x,t)|^2$ uit in $\psi(x,t)$ en z'n complex geconjugeerde. Bereken $\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2$ in termen van de flux $J(x,t) \equiv \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi - (\frac{\partial}{\partial x}\psi^*)\psi\right)$.

c. Geef een fysische uitleg voor het in onderdeel b. verkregen resultaat, gebruik makend van het feit dat de $\frac{\partial}{\partial x}$-operator in de definitie van de flux kan worden uitgedrukt in een andere bekende operator.

Opgave 1.3: Meten, kans, en verwachtingswaarden.

Een van de opvallende verschillen tussen de klassieke natuurkunde en de en quantummechanica is de rol van de meting in een experiment. In de quantummechanica zijn meetuitkomsten vaak *gequantiseerd*, dat wil zeggen dat er slechts bepaalde discrete meetuitkomsten mogelijk zijn. Verder beïnvloedt in de quantummechanica het doen van een meting de uitkomsten van latere metingen. Dit is een van de postulaten van de quantum-mechanica.

De nog tamelijk vage opmerkingen hierboven kunnen concreter worden geformuleerd met behulp van golffuncties en operatoren. De golffunctie $\Psi(x,t)$ beschrijft de toestand van het systeem. De dingen die gemeten zouden kunnen worden ('observabelen') A, B, enz. corresponderen met operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, enz.

De mogelijke uitkomsten van een nauwkeurige meting van A zijn de eigenwaarden van de operator $\hat{A}$. De eigenwaarden zijn de oplossingen λ van de eigenwaardenvergelijking $\hat{A}\phi(x) = \lambda\phi(x)$. Bij iedere eigenwaarde λ hoort een golffunctie (de eigenfunctie) $\phi_\lambda(x)$. Als je een meting doet en de uitkomst is λ, dan wordt de golffunctie $\Psi(x,t)$ onmiddelijk gelijk aan de eigenfunctie die bij die uitkomst hoort, namelijk $\phi_\lambda(x)$. Dit wordt in het Engels "the collapse of the wave function" genoemd; ook dit is een postulaat van de kwantummechanica.

We zullen het bovenstaande nu illustreren aan de hand van een voorbeeld, een deeltje in een potentiaalput met ondoordringbare wanden in één dimensie. De potentiaal voor dit systeem is

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < L \\ \infty & \text{anders} \end{cases} \tag{2}$$

De energie van het deeltje (een observabele) correspondeert met de operator $\hat{H}$, de Hamiltoniaan.

a. Geef de eigenwaarden λ en de bijbehorende eigenfuncties ψ_λ van de operator $\hat{H}$. Wat herken je in deze eigenwaarden?

Op $t = 0$ bevindt het deeltje zich in de toestand $\Psi(x) = \sin(\pi x/L) + \sin(3\pi x/L)$. ($\Psi$ is niet genormaliseerd.)

b. Bereken de verwachtingswaarde van de energie.

Hint: voor natuurlijke getallen m,n geldt:

$$\int_0^L sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} L/2 & \text{als } m = n \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \tag{3}$$

c. Wat zijn de mogelijke uitkomsten van een meting van de energie van het deeltje, en de bijbehorende kansen?

d. Stel we meten de energie van het deeltje. De uitkomst blijkt $\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ te zijn. Wat zijn de mogelijke uitkomsten als we direct daarna de energie van het deeltje opnieuw meten?