Opgave 9.1 Metingen aan een deeltje met spin

De draaiingsenergie van een systeem wordt in de klassieke mechanica gegeven door $(\vec{L}\cdot\vec{L})/2I$, waarbij $\vec{L}$ het (baan-)impulsmoment is (een vector) en I het traagheidsmoment. Je hebt al gezien dat in de kwantummechanica die impulsmoment-vector een *vector-operator* wordt: $\hat{L} = (\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$. Draaiingsenergie is dan evenredig met de verwachtingswaarde van $\hat{L}\cdot\hat{L}$. (Die $\hat{L}^2$-operator is geen vector-operator, want het is een inproduct van een vector-operator met zichzelf.) $\hat{L}^2$ heeft de eigenwaarden $l(l+1)\hbar^2$, waarbij $l = 0, 1, 2, \ldots$, geheel dus! Je hebt de eigentoestanden van een systeem nog niet helemaal gespecificeerd als je alleen de kwantumgetallen l geeft. Als je ook de kwantumgetallen m behorende bij de operator $\hat{L}_z$ geeft, is de beschrijving wel volledig. Merk op dat in de draaiingsenergie $l(l+1)\hbar^2/2I$ van een eigentoestand $|l, m\rangle$ het kwantumgetal m niet voorkomt! Nu blijkt dat de energie van een atoom *wel* van m kan gaan afhangen als je hem in een magneetveld zet. Je zult dat in dit college niet verder tegenkomen, maar het is van belang omdat op deze manier het bestaan van 'spin' is aangetoond: Stern en Gerlach deden een experiment waarbij een bundel zilveratomen door een inhomogeen magneetveld $\vec{B} \simeq (0, 0, B_z)$ werd geschoten. Ze ontdekten dat de bundel zich in tweeën splitste, een deel werd afgebogen naar de $+\hat{z}$-richting en de rest naar de $-\hat{z}$-richting.

a. Eerst doen we een klassieke berekening: de in de $\hat{x}$-richting bewegende bundel die door het magneetveld gaat, heeft de Hamiltoniaan $H = p_x^2/2M + \mu_z B_z(z)$. Welke kracht werkt er op dit atoom met magnetisch moment $\vec{\mu} = \mu_z$? Beredeneer wat er met de bundel gebeurd zou zijn als de magnetische momenten $\vec{\mu}$ allemaal dezelfde grootte μ hadden, maar isotroop over alle richtingen verdeeld waren.

b. In de kwantummechanica (zonder met spin rekening te houden) verwachtte men dat de magnetische momenten gekwantiseerd zijn, zodat alle μ_z evenredig zijn met een kwantumgetal m. Waarom is het echter onverwacht dat de bundel zich in *tweeën* opsplitst? Leg uit waarom het invoeren van spin dit probleem oplost.

Nu laten we het baanimpulsmoment voor wat het is en kijken alleen naar spin-operatoren en hun eigentoestanden. De ruimte die wordt opgespannen door de eigentoestanden van S_z en S^2 is heel geschikt om enige basisprincipes uit de kwantummechanica te illustreren, over het doen van metingen aan kwantumsystemen bijvoorbeeld. Uit het bovenstaande zal duidelijk zijn dat je de spin van een deeltje kunt meten door het een magneetveld te laten passeren.

c. Een meting van S_x levert $+\frac{1}{2}\hbar$. Wat is de toestand van het systeem onmiddelijk na deze meting? Meteen hierna wordt ook S_z gemeten. Wat zijn de mogelijke uitkomsten en de bijbehorende waarschijnlijkheden? Bereken ook $\langle S_z \rangle$ op dat moment.

d. De Hamiltoniaan voor een vastgeprikt deeltje met spin dat in een een magneetveld langs de $\hat{z}$-as is geplaatst, is: $H = \mu_B B \sigma_3$. Los de Schrödingervergelijking op.

e. Op tijd $t = 0$ is het systeem in de eigentoestand van S_x bij eigenwaarde $+\frac{1}{2}\hbar$. Het systeem evolueert in de tijd volgens de Hamiltoniaan in onderdeel (d.). Wat is de toestand op tijdstip $t = t_1$? Hint: zie hoofdstuk "Operators, matrices and spin".

f. Op $t = t_1$ wordt S_x opnieuw gemeten. Wat zijn de mogelijke uitkomsten en de bijbehorende waarschijnlijkheden?

g. Wat had je gevonden als op t_1 de grootheid S_z gemeten was? Verklaar het verschil met S_x.

Opgave 9.2: Spin-operatoren en Pauli-matrices

Spin-operatoren worden gedefinieerd door hun commutatie eigenschappen en vormen een speciaal geval van de in opgave 7.1 gegeven gegeneraliseerde impulsmoment operatoren met $j = \frac{1}{2}$.

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \; S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \tag{1}$$

a. Construeer een abstracte basis van gezamelijke eigentoestanden van S_z en S^2. (Hint: We zoeken dus een zelfde basis als in opgave 7.1, waarbij elk element gelabeld wordt door de bijbehorende quantum getallen)

b. Geef de matrix-elementen van $S_x, S_y, S_z, S_+, S_-, S^2$ in de in (a) gedefinieerde basis, waarbij S_+, S_- de stap-operatoren bij S_z zijn.

We kunnen nu Pauli-matrices definiëren door te nemen

$$\sigma_i = \frac{2}{\hbar} S_i, \; i = x, y, z \tag{2}$$

Bewijs nu de onderstaande eigenschappen m.b.v. de gevonden matrices.

c. $\sigma_i \, \sigma_j = i \, \epsilon_{ijk} \, \sigma_k + \delta_{ij} \mathbf{I}$

d. $\mathrm{Tr}(\sigma_i \, \sigma_j) = 2\delta_{ij}$

De vector van Pauli-matrices is gegeven door

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \tag{3}$$

Bewijs nu ook de volgende eigenschappen m.b.v. de gevonden matrices. De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ commuteren met $\vec{\sigma}$, maar niet noodzakelijkerwijs met elkaar.

e. $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

Als we $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vervangen door $\vec{r}$ en $\vec{p}$ dan zien we helemaal rechts in de vergelijking hierboven een term evenredig met $\vec{S} \cdot \vec{L}$ opduiken. Deze term beschrijft in het model voor een waterstofatoom hoe de energie verandert doordat de spin het magneetveld voelt dat ontstaat doordat het proton om het electron draait. (In het ruststelsel van het electron).

f. $\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$

Deze relatie is een samenvatting van de commutatie relaties tussen de Pauli-matrices.