Opgave 7.1: Gegeneraliseerde impulsmoment–operatoren

Een vectoroperator $\hat{\mathbf{J}}$ is een gegeneraliseerde impulsmomentoperator als zijn componenten $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ en $\hat{J}_z$ Hermitisch zijn en aan de volgende commutatierelaties voldoen:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z \tag{1}$$

en cyclische permutaties:

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x, \qquad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y, \tag{2}$$

oftewel, kort samengevat, $\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{J}} = i\hbar\hat{\mathbf{J}}$.
In deze opgave zullen we stap voor stap de basis van eigentoestanden van de operatoren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 &= \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{J}} = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \text{ en} \\ \hat{J}_z & \end{aligned} \tag{3}$$

opbouwen, met behulp van twee stapoperatoren. Ter inleiding enige eenvoudige vragen:

a. Welke eigenschap garandeert dat met elk van de operatoren $\hat{\mathbf{J}}^2$ en $\hat{J}_z$ inderdaad een basis van eigentoestanden is geassocieerd?
Welke eigenschap garandeert dat er bovendien een *gemeenschappelijke* basis van eigentoestanden bestaat?

We voeren nu een notatie in voor deze gemeenschappelijke eigentoestanden. We noemen ze $|jm\rangle$. Omdat dit later handig is schrijven we de eigenwaarden van $\hat{\mathbf{J}}^2$ in de vorm $j(j+1)\hbar^2$ en die van $\hat{J}_z$ in de vorm $m\hbar$:

$$\hat{\mathbf{J}}^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle \tag{4}$$

$$\hat{J}_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle. \tag{5}$$

c. Geef aan waarom de eigenwaarden van $\hat{\mathbf{J}}^2$ en $\hat{J}_z$ altijd reëel zijn en leg uit dat

$$j(j+1) \geq m^2. \tag{6}$$

We voeren nu de stapoperatoren in, de creatie-operator $\hat{J}_+$ en zijn geadjugeerde, de annihilatie-operator $\hat{J}_-$:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \qquad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \tag{7}$$

d. Laat zien dat de toestanden $\hat{J}_\pm|jm\rangle$ eigentoestanden zijn van $\hat{\mathbf{J}}^2$ en $\hat{J}_z$, met eigenwaarden $j(j+1)\hbar^2$ respectievelijk $(m \pm 1)\hbar$. (Hint: bereken de commutatoren $[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_\pm]$ en $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm]$.)

Met behulp van de stapoperatoren kunnen we dus een verzameling eigentoestanden maken met verschillende m, voor dezelfde j. Vanwege vgl.(6) moet er (voor vaste j) een hoogste en laagste waarde voor m zijn, die we even m_H en m_L noemen.

e. Beredeneer dat het verschil $m_H - m_L$ een positief geheel getal, of nul moet zijn.

Als we bij de hoogste of laagste sport van de "ladder" van toestanden met verschillende m zijn gekomen, kunnen we niet meer verder:

$$\hat{J}_+|jm_H\rangle = 0, \qquad \hat{J}_-|jm_L\rangle = 0. \tag{8}$$

Om m_H en m_L te bepalen, laten we $\hat{J}_+\hat{J}_-$ werken op de laagste toestand, dus op $|jm_L\rangle$.

f. Wat is $\hat{J}_+\hat{J}_-|jm_L\rangle$? Druk vervolgens J_+J_- uit in termen van $\hat{\mathbf{J}}^2$ en $\hat{J}_z$, en laat dit ook werken op $|jm_L\rangle$. Geef nu de vergelijking voor m_L.

g. Bepaal op soortgelijke manier de vergelijking voor m_H, door $\hat{J}_-\hat{J}_+$ te beschouwen.

h. Bereken m_L en m_H in termen van j.

i. Hoeveel verschillende waarden kan m aannemen, voor vaste j? Leg uit dat j alleen heel- **èn** halftallig kan zijn. Hint: zie boek hoofdstuk 10. Wat is het verschil met de eigenwaarden van een gewone (niet gegeneraliseerde) impulsmoment–operator?