6.1: Zwaartepunts coördinaten

In opgave 5.2 hebben we voor een twee deeltjes systeem de separatie naar een zwaartepunts- en een relatieve variabele gemaakt. Deze separatie is ook beschreven in hoofdstuk 8 (N-particle systems) van Gasiorowicz. In deze opgave willen we de separatie gaan toepassen op een proton-electron systeem, $p-e^-$, en een electron-positron systeem, $e^- - e^+$. U moet een aantal dingen uitrekenen, let dus op eenheden!

a. Bereken de gereduceerde massa van het electron-proton systeem in [MeV$/c^2$]. Bereken de zwaartepunts coördinaat X_z als functie van de electron coördinaat x_{e^-} en de proton coördinaat x_p.

b. Stel het systeem bevindt zich in een gebonden toestand ten gevolge van de coulomb wisselwerking $V(x_{e^-} - x_p) = -e^2/(x_{e^-} - x_p)$, kortom we hebben een waterstof atoom zonder spin. Het zwaartepunt van het systeem bevindt zich in rust. Welke benadering mag u maken als u tot op $\pm 0.1\%$ nauwkeurig de energie niveaus wil berekenen.

c. In de situatie van b. wil u nu ook de zwaartepunts beweging meenemen, ook dit keer neemt u genoegen met een onnauwkeurigheid van $\pm 0.1\%$, geef de Hamiltoniaan voor de zwaartepunts beweging.

d. Bereken de gereduceerde massa van het electron-positron systeem in $[MeV/c^2]$. Bereken de zwaartepunts coördinaat X_z als functie van de electron coördinaat x_{e^-} en de positron coördinaat x_{e^+}.

e. Geef aan of je onder verder gelijk gebleven omstandigheden de in b. en c. gemaakte benadering hier nog mag toepassen, beredeneer je antwoord.

Opgave 6.2: Twee deeltjes met interactie (Oude tentamenopgave)

Beschouw allereerst twee onderscheidbare deeltjes van gelijke massa m, die in één dimensie met elkaar wisselwerken via de volgende potentiaal:

$$V(|x_1 - x_2|) = \begin{cases} 0, & \text{als } |x_1 - x_2| \leq a, \\ \infty, & \text{anders.} \end{cases} \tag{1}$$

x_1 is de coördinaat van het eerste deeltje, x_2 van het tweede deeltje.

a. Geef de Schrödingervergelijking in zwaartepuntscoordinaten (‘*center of mass coordinates*’). Licht de betekenis van alle gebruikte variabelen toe. (Hint: Maak gebruik van uw antwoord bij opgave 5.2.)

b. Leg uit wanneer in het algemeen de Schrödingervergelijking opgesplitst kan worden in twee delen door middel van scheiding van variabelen.

c. Pas scheiding van variabelen toe op de Schrödingervergelijking uit onderdeel a., dat wil zeggen geef de Schrödingervergelijkingen voor de twee onafhankelijke deel-golffuncties.

d. Los de deel-Schrödingervergelijking voor de relatieve coördinaat op. (Let op! Er zijn zowel sinus- als cosinusachtige oplossingen!)

e. Geef het energiespectrum en de bijbehorende *totale* golffuncties (in formule). Schets de golffuncties van de laagste 4 energietoestanden, in geval de totale impuls nul is.

Vervolgens beschouwen we identieke deeltjes, die met elkaar wisselwerken via dezelfde potentiaal.

f. In geval we bosonen beschouwen, wat zijn dan nu de energie-eigenfuncties? Schets de golffuncties horende bij de laagste twee energieën.

g. Idem voor fermionen. (Laat spin buiten beschouwing.)