Opgaven Quantumfysica II: Week 5

Inleveren voor 12:00 uur op dinsdag 27 januari bij de portier van de Diamantslijperij.
Bij problemen: Ronald van Elburg, tel.(525)5975, Martijn Wubs, tel. (525)5645 of Mischa Megens, tel. (525)5651.

Opgave 5.1: Deeltjes op een cirkel, statistiek

We beschouwen een deeltje van massa μ dat in zijn beweging beperkt is; het kan alleen bewegen op een cirkel met (vaste) straal r. De coordinaat ϕ van het deeltje op de cirkel ligt tussen 0 en 2π. De Hamiltoniaan wordt dan gegeven door:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d^2}{d\phi^2} \tag{1}$$

De eigenfuncties van deze Hamiltoniaan noemen we $u_n(\phi)$; de bijbehorende eigenwaarden (energieniveaus) noemen we E_n.

a. Laat zien dat de energieniveaus van één zo'n deeltje gegeven zijn door

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2\mu r^2},\ \text{met } n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

. Zijn de niveaus ontaard?

b. Laat zien dat de bijbehorende genormaliseerde eigenfuncties $u_n(\phi)$:

$$u_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\phi} \tag{3}$$

Tot zover het enkele deeltje. In het geval dat er meerdere deeltjes van dezelfde soort op de cirkel zitten, wordt de situatie iets ingewikkelder. De golffunctie van het totale systeem hangt nu van meerdere hoeken af ($\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots$). Als de deeltjes geen interactie hebben, dan kan de totale golffunctie $\Psi(\phi_1, \phi_2, \ldots)$ geschreven worden als produkt van één-deeltjes-golffuncties. Echter niet alle combinaties zijn mogelijk; of een combinatie voor komt, is verschillend voor verschillende soorten deeltjes (bosonen en fermionen).

c. Geef voor drie niet-wisselwerkende deeltjes met bovenstaande ééndeeltjes Hamiltoniaan de grondtoestand in het geval dat deze deeltjes bosonen zijn en geef de energie van deze grondtoestand.

d. Idem maar nu voor het geval de drie deeltjes fermionen zijn.

e. Hoe zit het met de normalisatie van de driedeeltjesgolffuncties in c. en d.?

We veranderen nu de Hamiltoniaan op de volgende manier

$$H_{nieuw} = H_{oud} + i\hbar\omega\frac{d}{d\phi},\ \omega = \frac{\hbar}{4\mu r^2} \tag{4}$$

We gaan nu weer verder met één enkel deeltje op de cirkel.

e. Laat zien dat de oude en de nieuwe Hamiltoniaan commuteren. Wat heeft dit voor gevolgen voor de eigenfuncties van de oude en nieuwe Hamiltoniaan?

f. Bepaal de eigenfuncties en -waarden van H_{nieuw}. Hint: het bepalen van de eigenfuncties is héél eenvoudig (zie onderdeel e.).

Ten gevolge van de extra term in de Hamiltoniaan krijgen de deeltjes een voorkeursdraairichting. Dat de extra term iets met de draairichting te maken heeft, wordt duidelijk als je de term vergelijkt met de impulsmoment-operator. De component van het impulsmoment loodrecht op de cirkel, L_z, is gegeven door

$$L_z = i\hbar\frac{d}{d\phi} \tag{5}$$

. Ten gevolge hiervan verandert de ontaarding van de (een-deeltjes) aangeslagen toestanden. Ook voor meer-deeltjes toestanden verandert er het een en ander.

g. Geef de grondtoestand voor twee niet wisselwerkende fermionen met Hamiltoniaan H_{nieuw}. Wat is het energieniveau van de grondtoestand?

h. Schets de kansverdeling in deze grondtoestand als functie van het verschil in positie $\phi_1 - \phi_2$.

Om enig inzicht te krijgen in de vorm van de golffunctie voor twee deeltjes benoemen we nu kansen om (een) deeltje(s) op (een) bepaalde plaats(en) aan te treffen. Zo is daar de kans $P(\phi_1, \phi_2)\mathrm{d}\phi_1\mathrm{d}\phi_2$ om deeltje 1 tussen ϕ_1 en $\phi_1 + \mathrm{d}\phi_1$ en deeltje 2 tussen ϕ_2 en $\phi_2 + \mathrm{d}\phi_2$ aan te treffen:

$$P(\phi_1, \phi_2)\mathrm{d}\phi_1\mathrm{d}\phi_2 = |\Psi(\phi_1, \phi_2)|^2 \mathrm{d}\phi_1\mathrm{d}\phi_2 \tag{6}$$

. De kans om één deeltje op een bepaalde plaats aan te treffen volgt hier onmiddelijk uit; de kans om deeltje 1 aan te treffen tussen ϕ_1 en $\phi_1 + \mathrm{d}\phi_1$ is precies de kans om beide deeltjes aan te treffen, deeltje 1 tussen ϕ_1 en $\phi_1 + \mathrm{d}\phi_1$ en deeltje 2 willekeurig waar:

$$P(\phi_1)\mathrm{d}\phi_1 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_2 \; P(\phi_1, \phi_2) \tag{7}$$

.

i. Geldt $P(\phi_1, \phi_2) = P(\phi_1)P(\phi_2)$ voor de fermionen uit onderdeel g.?

j. Gelijk aan onderdeel g. maar nu voor twee bosonen met Hamiltoniaan H_{nieuw}.

k. Schets de kansverdeling van deze grondtoestand als functie van het verschil in positie $\phi_1 - \phi_2$.

l. Leg het verschil tussen de schetsen van de onderdelen h,k uit; gebruik hierbij de begrippen: toestand, fermion, boson, Pauli-uitsluitingsprincipe.

Opgave 5.2: Twee wisselwerkende deeltjes

Gegeven twee deeltjes met verschillende massa's m_1 en m_2. Er is geen uitwendige invloed, dus de potentiaal V hangt alleen af van de afstand tussen de deeltjes, $V(x_1 - x_2)$. We zullen nu laten zien dat dit probleem, net als in klassieke mechanica, uiteenvalt in twee onafhankelijke deelproblemen. Hint: bij deze opgave kunt u veelvuldig gebruik maken van hoofdstuk 8 van Gasiorowicz.

a. Voer nieuwe coördinaten in, d.w.z. definieer de relatieve coordinaat x en de zwaartepuntscoordinaat X in termen van x_1 en x_2, waarbij je gebruik kunt maken van de 'gereduceerde massa' μ. Bereken (dus mèt afleiding) de Hamiltoniaan in termen van deze nieuwe coördinaten.

b. Leg uit wat de twee deelproblemen zijn waar in de inleiding over gesproken wordt, en waarom de totale golffunctie 'gesepareerd' mag worden in een golffunctie $\psi(x)$ en een golffunctie $\Psi(X)$.

c. Schrijf de eigenwaardevergelijking voor het twee-deeltjes-probleem om, zodanig dat aan de ene kant van het gelijk-teken alleen operatoren staan die afhangen van x, en aan de andere kant alleen operatoren die afhangen van X. Leid hiermee de vergelijking voor $\psi(x)$ en de vergelijking voor $\Psi(X)$ af.

d. Los $\Psi(X)$ op. Druk de voorkomende constante uit in de golfgetallen k_1 en k_2 van de afzonderlijke deeltjes.

We keren terug naar de totale golffunctie $\Phi_{tot}(x_1, x_2)$.

e. Laat zien dat de Hamiltoniaan invariant is onder translaties, dus onder $x_{1,2} \to x_{1,2} + a$.

f. Neem nu a infinitesimaal, en ontwikkel $\Phi_{tot}(x_1 + a, x_2 + a)$ in a.

g. Neem het verschil van de eigenwaardevergelijkingen van $\Phi_{tot}(x_1, x_2)$ en die van $\Phi_{tot}(x_1 + a, x_2 + a)$ voor de Hamiltoniaan H. Laat hiermee zien dat de totale impulsoperator $P = \frac{\hbar}{i} \sum_{i=1,2} \frac{\partial}{\partial x_i}$ commuteert met de Hamiltoniaan.

h. De totale impuls is dus een behouden grootheid. Waarom had je dit ook al na onderdeel (b.) kunnen concluderen?