Opgaven Quantumfysica II: Week 10

Inleveren voor 12:00 uur op dinsdag 3-3 bij de portier van de Diamantslijperij.
Bij problemen: Ronald van Elburg, tel.(525)5975, Martijn Wubs, tel. (525)5645 of Mischa Megens, tel. (525)5651.

Opgave 10.1: Optellen van Spins

We bekijken twee onderscheidbare deeltjes met spin $s = 1/2$ (fermionen). In de operator basis $\{S_1^2; S_2^2; S_{z1}; S_{z2}\}$ (dat wil zeggen, in de basis van gemeenschappelijke eigentoestanden van de genoemde operatoren) worden de toestanden beschreven door de volgende produkt-toestanden: $|s_1, s_2, m_1, m_2 >= |s_1, m_1 > |s_2, m_2 >$. Voortaan zullen we alle s_1 en s_2 weglaten uit de kets omdat ze toch 1/2 zijn. We gaan vervolgens over op een andere volledige set van commuterende operatoren om de twee-deeltjes toestanden te karakteriseren: $\{S_{\text{tot}}^2; S_{z\text{tot}}; S_1^2; S_2^2\}$ waarbij geldt:

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}}^2 &= (S_1 + S_2)^2 \qquad S_{\text{tot}}^2|S, M >= S(S+1)\hbar^2|S, M > \\ S_{z\text{tot}} &= S_{1z} + S_{2z} \qquad S_{z\text{tot}}|S, M >= M\hbar|J, M >, \quad M = -S, -S+1, ...S \end{aligned} \tag{1}$$

a. Beredeneer dat moet gelden: $|S = 1, M = 1 >= |m_1 = 1/2, m_2 = 1/2 >$
   Merk op dat deze toestand symmetrisch is onder verwisseling van deeltje 1 en 2.

We definieren nu de operator $S_{\text{tot}}^- = S_1^- + S_2^-$ met:

$$S_1^-|m_1 >= N|m_1 - 1 >$$

Waarbij N een normeringsconstante is. Door deze operator herhaaldelijk op $|S = 1, M = 1 >$ te laten werken kunnen we de "subruimte" $|S = 1, M = 1 >$; $|S = 1, M = 0 >$; $|S = 1, M = -1 >$ opbouwen.

b. Voer de bovenbeschreven procedure uit en druk deze toestanden uit in lineaire combinaties van de $|m_1, m_2 >$ toestanden.

We hebben nu de subruimte S=1 gevonden. De subruimte met S=0 (en dus M=0) staat hier loodrecht op (Hint, hint!)..

c. Vind de toestand $|S = 0, M = 0 >$.

d. Stel dat de deeltjes ononderscheidbare fermionen zijn, welke toestanden zijn dan niet toegestaan?

opgave 10.2: Superluminale informatieoverdracht?

Een deeltje met $J = 0$ valt spontaan uiteen in twee deeltjes met elk spin 1/2 (en een relatief baanimpulsmoment dat gelijk is aan 0).

A $\longleftarrow$ J=0 systeem $\longrightarrow$ B

deeltje 1 deeltje 2

Waarnemer A meet de z-component van de spin van deeltje 1. Hij of zij meet dat de spin "up" is, dat wil zeggen $+\hbar/2$.

a. Waarnemer B meet de z-component van de spin van deeltje 2. Wat zijn de mogelijke uitkomsten van zo'n meting? Bereken de waarschijnlijkheden.

b.]. In plaats van het meten van de z-component van de spin van deeltje 2, meet waarnemer B de x-component van de spin van deeltje 2. Wat zijn de mogelijke uitkomsten van zo'n meting? En de bijbehorende waarschijnlijkheden?

Waarnemer A meet nu in plaats van de z-component van de spin van deeltje 1 de x-component van de spin van deeltje 1. Hij of zij vindt de uitkomst "up" $(+\hbar/2)$.

c. Idem als vraag a.

d. Idem als vraag b.

e. Vergelijk de antwoorden van a en b met die van c en d. Het lijkt alsof deeltje 2 “weet” welke component van de spin van deeltje 1 door A gemeten is, hoewel A en B op hetzelfde moment hun meting doen en hoewel er geen enkele interactie tussen de deeltjes is geweest na hun ontstaan. Wijst dit op het bestaan van informatieoverdracht met een snelheid groter dan het licht?