# Opgaven Quantumfysica II, Week 8, 23 februari 2000

*Inleveren voor maandag 28 februari, 12.00 uur, bij de portier van de Diamantslijperij. Met vragen over stof en opgaven kun je terecht bij de werkcollegedocenten:*


- *Alejandro Arrizabalaga (ITF kamer 333, tel. 5255006, arrizaba@wins.uva.nl)*
- *Joost Slingerland (ITF kamer 356, tel. 5255920, slinger@wins.uva.nl)*
- *Martijn Wubs (WZI kamer B045, tel 5255646, wubs@wins.uva.nl).*


*Vermeld alstjeblieft de naam van je werkcollegedocent op het in te leveren werk. Succes !*

## Opgave 8: Symmetrieën van een tweedimensionale harmonische oscillator

Overal in de natuurkunde kom je harmonische oscillatoren tegen. De reden daarvoor hebben we al gezien in paragraaf 2.3 van Griffiths: bijna elke potentiaal $V(\vec{r})$ is bij benadering parabolisch in de buurt van een locaal minimum. En laten de energieniveaus en de bijbehorende golffuncties van een harmonische oscillator ook nog eens oplosbaar zijn! In Griffiths' paragraaf 2.3.1 stond een mooie algebraïsche methode om dat te doen, en in 2.3.2 controleerde hij dat er via een analytische methode hetzelfde uitkwam.

In deze opgave gaan we verder op de algebraïsche toer, maar nu in twee dimensies. Doel van deze opgave is om te laten zien hoe je symmetrieën kunt gebruiken, zoals nu bij het bepalen van het spectrum van een isotrope harmonische oscillator.

### De isotrope oscillator, klassiek

a. We beginnen klassiek. Beschouw de Hamiltoniaan

$$H = \frac{1}{2M}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}M\omega^2(x_1^2 + x_2^2). \tag{1}$$

Hierin is $\omega$ een frequentie. Leg uit waarom de oscillator isotroop genoemd wordt, en geef de Hamilton vergelijkingen van het systeem.

b. De Hamilton vergelijkingen ontkoppelen als we de volgende lineaire combinaties van de variabelen invoeren:

$$\begin{aligned}
a_1^\dagger &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_1 - i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_1 \\
a_1 &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_1 + i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_1 \\
a_2^\dagger &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_2 - i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_2 \\
a_2 &= \sqrt{\frac{M\omega^2}{2}}x_2 + i\sqrt{\frac{1}{2M}}p_2
\end{aligned} \tag{2}$$

Herschrijf de Hamilton vergelijkingen in termen van $a_1^{(\dagger)}$ en $a_2^{(\dagger)}$, analoog aan het eendimensionale geval.

c. Los de in [b.] gevonden vergelijkingen op en laat zien welke oplossingen voor $x_1(t)$ en $x_2(t)$ ze opleveren. Vergelijk het resultaat met het eendimensionale geval, en leg uit met behulp van de Hamiltoniaan waarom de oscillatiebewegingen in de $x_1$- en de $x_2$-richting onafhankelijk van elkaar zijn.

**De isotrope oscillator, kwantummechanisch**

d. In het overeenkomstige kwantummechanische probleem zijn de $x_i, p_i$ operatoren die aan de canonieke commutatierelaties voldoen: $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}$ en $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$. Leid hiermee de commutatierelaties van de ladderoperatoren $a_1, a_1^\dagger, a_2$ en $a_2^\dagger$ af.

e. Herschrijf de Hamiltoniaan in termen van de ladderoperatoren.

f. We zouden het spectrum van de oscillator kunnen berekenen met behulp van de Hamiltoniaan die je in [e.] gevonden hebt. Dat doen we nu niet: om later in de opgave de koppeling van de oscillator aan een magneetveld handig te kunnen beschrijven, voeren we nu een variabelentransformatie uit waarin de twee richtingen 'mengen':

$$\begin{aligned} C &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - ia_2) \\ D &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + ia_2) \\ C^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + ia_2^\dagger) \\ D^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger - ia_2^\dagger). \end{aligned} \tag{3}$$

Leid de commutatierelaties van deze nieuwe operatoren af uit de commutatierelaties van de oude set. Laat zien dat de Hamiltoniaan geschreven kan worden als

$$H = C^\dagger C + D^\dagger D + \hbar\omega. \tag{4}$$

(Opmerking: al weten we op dit punt nog niet hoe de $C$- en $D$-excitaties fysisch geïnterpreteerd moeten worden, toch zien we hier al aan de Hamiltoniaan dat ze onafhankelijk van elkaar zijn, net als de $a_1$- en $a_2$-excitaties in onderdeel [e.].)

g. De grondtoestand- of laagste energie-eigentoestand $|0\rangle$ is gedefinieerd door zijn eigenschap dat hij geannihileerd wordt door de 'trap-af' ladderoperatoren $C$ en $D$:

$$C|0\rangle = D|0\rangle = 0. \tag{5}$$

De geëxciteerde toestanden worden verkregen door de 'trap-op' ladderoperatoren $C^\dagger$ en $D^\dagger$ herhaaldelijk op de grondtoestand te laten werken. Laat zien dat de toestand

$$|n_+, n_-\rangle = (C^\dagger)^{n_+}(D^\dagger)^{n_-}|0\rangle \tag{6}$$

een eigentoestand is van de Hamiltoniaan. (Opmerking: je ziet dat de operator algebra van de ladderoperatoren de "spectrum genererende" algebra is van het 2D harmonische oscillatorprobleem.)

h. Welke energieniveaus zijn ontaard en hoeveel ontaarde toestanden zijn er op een gegeven energieniveau?

i. De ontaarding van het spectrum doet vermoeden dat er symmetrieën bestaan waar we in het vervolg gebruik van kunnen maken. Beschouw de operator voor het baanimpulsmoment

$$L_z \equiv x_1p_2 - x_2p_1. \tag{7}$$

Herschrijf $L_z$ in termen van de operatoren $C, C^\dagger, D$ en $D^\dagger$. We voeren nog twee operatoren $L_+$ en $L_-$ in:

$$\begin{aligned} L_+ &\equiv \frac{C^\dagger D}{\omega} \\ L_- &\equiv \frac{D^\dagger C}{\omega} \end{aligned} \tag{8}$$

Beredeneer of leid af dat de operatoren $L_z, L_+$ en $L_-$ commuteren met $H$. Daaruit volgt dat het symmetrie-operatoren zijn. Leid het volgende af: als de golffunctie op tijdstip $t$ een eigentoestand is van $L_z$ met eigenwaarde $l\hbar$, dan geldt dit nog steeds voor de golffunctie op een later tijdstip $t + dt$. (Neem voor het gemak $dt$ klein). $L_z$ is dus een behouden grootheid.

j. Bepaal nu de algebra van de $L$-operatoren. Welke bekende algebra vind je? (Opmerking: deze symmetrie is 'toevallig' of 'dynamisch', aangezien de symmetrie niet meteen uit de ruimtelijke symmetrie van het systeem volgt, dat wil zeggen uit de $SO_2$ symmetrie van rotaties in het $x_1, x_2$-vlak.)

k. We hebben nu 'C'-excitaties en 'D'-excitaties die niet met een richting in het vlak corresponderen, maar met een draai-richting (met de klok mee of ertegenin). Een toestand is aan te geven met het aantal excitaties in de twee draairichtingen: $|n_+, n_-\rangle$. Dezelfde toestand kun je echter ook eenduidig weergeven als $|n = n_+ + n_-, l = n_+ - n_-\rangle$: het eerste getal stelt het totale aantal excitaties voor en het tweede getal het 'netto' aantal excitaties in de positieve draairichting. Laat zien dat

$$\begin{aligned} L_z|n,l\rangle &= \hbar l|n,l\rangle, \\ H|n,l\rangle &= (n+1)\hbar\omega|n,l\rangle, \\ L_+|n,n\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

l. Laat herhaaldelijk de operator $L_-$ werken op de toestand $|n,n\rangle$. Wat zijn de eigentoestanden van $H$ en $L_z$ die je dan vindt? En wat is de kleinste eigenwaarde van $L_z$ die je zo vindt? Teken het spectrum als stippen in het $(E,l)$-vlak.

m. Stel dat de oscillator een harmonisch gebonden electron beschrijft dat in de $z$-richting niet kan bewegen. Als je een magneetveld $B$ in de $z$-richting aanlegt, dan beïnvloedt dat de energie en beweging van het electron. In vergelijking tot de situatie zonder magneetveld krijgt de Hamiltoniaan $H_1$ die het systeem beschrijft er twee termen bij, waarvan één evenredig met $L_z$:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2M}(p_1^2 + p_2^2) + \left(\frac{1}{2}M\omega^2 + \frac{e^2B^2}{8Mc^2}\right)(x_1^2 + x_2^2) + \frac{eB}{2Mc}(x_2p_1 - x_1p_2) \\ &= (C^\dagger C + D^\dagger D + \hbar\Omega) - \frac{\omega_1}{\Omega}(D^\dagger D - C^\dagger C), \end{aligned} \tag{10}$$

waarin $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2}$ en $\omega_1 = eB/2Mc$ en $[C, C^\dagger] = [D, D^\dagger] = \hbar\Omega$. (Als je dit narekent, houd dan rekening met het feit dat in de definitie van $a_1, a_2$, etcetera nu de frequentie $\Omega$ staat.) Laat zien dat de $|n,l\rangle$ nog steeds energie-eigentoestanden zijn. Beredeneer dat de operatoren $L_\pm$ geen symmetrie-operatoren meer zijn als $B \neq 0$. Teken weer in het $(E,l)$-vlak het spectrum, nu voor het geval dat het magneetveld precies zo groot is dat $\omega_1 = \omega$.