Opgaven Quantumfysica II, Week 3, 19 januari 2000

Inleveren voor maandag 24 januari 2000, 12.00 uur, bij de portier van de Diamantslijperij. Met vragen over stof en opgaven kun je terecht bij de werkcollegedocenten:

- *Alejandro Arrizabalaga (ITF kamer 333, tel. 5255006, arrizaba@wins.uva.nl)*
- *Joost Slingerland (ITF kamer 356, tel. 5255920, slinger@wins.uva.nl)*
- *Martijn Wubs (WZI kamer B045, tel 5255646, wubs@wins.uva.nl).*

Opmerking:
Deze en de komende week worden Joost en Alejandro vervangen door

- *Eddy Ardonne (ITF kamer 358, tel. 5255922, ardonne@wins.uva.nl)*
- *Ronald van Elburg (ITF kamer 386, tel. 5255975, elburg@wins.uva.nl)*

Om chaos te voorkomen zouden we het op prijs stellen als je de naam van je werkcollegedocent (niet die van de vervanger !) op je blaadje vermeldt. Succes met de opgaven !

Inleiding

In deze set opgaven zullen we de beginselen van de theorie achter quantumteleportatie doorwerken. Quantumteleportatie is het overbrengen van de toestand van een quantumsysteem op een ander quantumsysteem. Het gaat hierbij niet om het kopieren van toestanden, maar echt om overbrengen; na afloop van het proces is het eerste quantumsysteem niet meer in de oorspronkelijke toestand. In theorie kan het "quantumsysteem" alles zijn, maar in de praktijk is teleportatie tot nu toe alleen gerealiseerd voor het geval dat het systeem een foton is. In het Natuur- en Techniekartikel in de bijlage kun je wat meer informatie over theoretische en experimentele teleportatie vinden. De andere artikelen in de bijlage zijn de belangrijkste originele artikelen over theorie van teleportatie en over een van de eerste geslaagde teleportatie-experimenten. Het theorieartikel zullen we in opgave 3.3 voor het grootste deel reproduceren. Er is ook een artikel bijgevoegd over het verwante onderwerp van het kopieren van quantumtoestanden. Dit artikel repoduceren we in opgave 3.2. Ter voorbereiding is er een opgave over de Einstein-Podolsky-Rosen-paradox. Over de EPR-paradox kun je meer informatie vinden in het "Afterword" van Griffiths. Het kan zeker nuttig zijn bij het maken van elke opgave het relevante artikel erbij te houden, maar het is niet nodig de artikelen van tevoren helemaal door te lezen.

Opgave 3.1: De EPR-paradox

We bekijken een systeem van twee deeltjes die zich elk in twee orthonormale (spin)toestanden kunnen bevinden: $|\uparrow\rangle$ (up) en $|\downarrow\rangle$ (down). Een toestand van het hele systeem waarin deeltje 1 spin up heeft en deeltje 2 spin down kunnen we schrijven als $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$. Deze toestand vormt samen met de toestanden $|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$, $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ en $|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ een orthonormale basis voor de Hilbertruimte van het hele systeem. Een andere basis voor de twee-deeltjes-Hilbertruimte wordt gevormd door de toestanden $|\Psi^{\pm}_{12}\rangle$ en $|\Phi^{\pm}_{12}\rangle$, gegeven door

$$|\Psi^{\pm}_{12}\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$$

$$| \Phi_{12}^{\pm} \rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (| \uparrow \rangle_1 | \uparrow \rangle_2 \pm | \downarrow \rangle_1 | \downarrow \rangle_2)$$

a. ga na dat de bovenstaande basis orthonormaal is.

b. door metingen aan de spin van het hele systeem kunnen we het systeem in een van de toestanden $| \Psi_{12}^{\pm} \rangle$ of $| \Phi_{12}^{\pm} \rangle$ dwingen. Stel dat we het systeem op deze manier in de toestand $| \Psi_{12}^{-} \rangle$ hebben gebracht. Vervolgens kunnen we weer metingen gaan doen aan de spin van de afzonderlijke deeltjes. Wat is de kans dat we bij zo'n meting vinden dat deeltje 1 spin up (down) heeft (en idem voor deeltje 2) ? Wat is de kans om deeltje 2 met spin up te vinden nadat een meting al heeft uitgewezen dat deeltje 1 spin up heeft? Wat is de kans om de deeltjes met tegengestelde spin aan te treffen ?

c. Stel nog steeds dat het systeem in de toestand $| \Psi_{12}^{-} \rangle$ is. We kunnen de deeltjes 1 en 2 nu in principe naar twee laboratoria verplaatsen die op grote afstand van elkaar gelegen zijn, zonder daarbij de spintoestand van het systeem te veranderen. Als we nu eerst in laboratorium 1 de spin van deeltje 1 meten en we vinden spin up, wat is dan de kans om bij een meting van de spin van deeltje 2, dat zich op grote afstand bevindt, *direct daarna* spin down te vinden ? Waarom lijkt dit in strijd te zijn met de relativiteitstheorie ?

Het experiment van onderdeel c werd in 1935 bedacht door Einstein, Podolsky en Rosen. Het was op dat moment nog niet praktisch uitvoerbaar, maar intussen zijn dit soort experimenten vele malen met succes uitgevoerd en steeds blijkt dat de quantummechanica de juiste voorspelling geeft. Toch is er iets vreemds aan de hand. Als je de quantummechanica als model voor de werkelijkheid accepteert, moet je toegeven dat er een *instantane* interactie/correlatie is tussen de twee fotonen van het EPR-paar. Zodra het ene foton gemeten wordt, "weet" het andere foton dat en er is geen tijd nodig om de invloed van het meten over te brengen. Einstein, Podolsky en Rosen vonden dit soort werking op afstand niet acceptabel en kozen voor een andere verklaring: er is helemaal geen interactie, de fotonen hadden gewoon vanaf het begin (voor de meting) allebei een welbepaalde spin. Deze spin kan door de quantummechanica niet worden voorspeld en de quantummechanica is dus weliswaar een correcte, maar geen complete theorie (om met EPR te spreken: er zijn elementen van de werkelijkheid die niet door de quantummechanica beschreven worden). Inmiddels zijn er weer experimenten bedacht (door J. Bell) en uitgevoerd die dit standpunt moeilijk houdbaar maken en het lijkt erop dat we niet-lokale correlaties moeten accepteren. Toch blijken die ook weer niet direct de problemen met causaliteit op te leveren die je zou verwachten. Om dit echt te begrijpen zul je wat dieper in de literatuur moeten duiken, maar hier zijn in elk geval vast twee vragen om over na te denken in direct verband met het EPR-experiment:

d. Als je met behulp van EPR-paren boodschappen kon doorgeven zonder tijdverlies, hoe zou dat dan problemen met oorzaak en gevolg kunnen opleveren ?

e. Waarom kun je met de EPR-metingen in het experiment van onderdeel c geen boodschappen doorgeven ?

Literatuur: Zie voor meer informatie over de EPR-paradox bijvoorbeeld het "Afterword" van Griffiths (vanaf blz. 374). Het oorspronkelijke artikel van Einstein, Podolsky en Rosen kun je vinden in: *Phys. Rev. 47, p.777, 1935* en het antwoord hierop van Bohr in: *Phys. Rev. 48, 696-702, 1935*

Opgave 3.2: Het kopieerverbod

Stel, we hebben een quantumsysteem met tenminste twee (lineair onafhankelijke) toestanden. We noemen twee van deze toestanden voor het gemak weer even $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$. Het zou soms handig zijn als we de toestand van zo'n systeem konden kopieren. Stel bijvoorbeeld dat het systeem een deeltje is dat zich in de toestand $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ bevindt. Door metingen van de spin van het deeltje kunnen we de coëfficienten α en β en zelfs de kansen $|\alpha|^2$ en $|\beta|^2$ nooit bepalen

a. Waarom niet ?

b. Als we de toestand van het deeltje op een (groot) aantal andere deeltjes konden overbrengen, zouden we $|\alpha|^2$ en $|\beta|^2$ wel met grote nauwkeurigheid kunnen bepalen. Hoe ?

c. Kijk nu eens terug naar de vorige opgave. We hadden daar een EPR-paar van deeltjes die we elk door meting in een van de toestanden $|\uparrow\rangle$ of $|\downarrow\rangle$ konden dwingen. Stel dat we ook een ander soort meting konden doen, waarmee we de deeltjes in een van de toestanden $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ of $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ kunnen doen belanden. (Zoiets is in de praktijk wel mogelijk) Stel bovendien dat we de toestanden van deze deeltjes konden kopieren. Hoe zouden we dan met behulp van EPR-paren sneller dan het licht boodschappen kunnen overbrengen ? (Hint: als je moeite hebt met deze vraag kan het bijgevoegde artikeltje van Wootters en Zurek uitkomst bieden)

d. Gezien het resultaat van het vorige onderdeel lijkt het onwaarschijnlijk dat kopieren van quantumtoestanden mogelijk is. We zullen nu een (direct) argument proberen te vinden waaruit dit inderdaad blijkt. Stel dat we een apparaat konden bouwen dat quantumtoestanden kopieerde. Voor het kopieren zouden we dit dan in een of andere begintoestand $|A_0\rangle$ brengen en de toestand van het hele systeem voor het kopieren zouden we dan kunnen schrijven als $|A_0\rangle|t\rangle|?\rangle$. Hier bedoelen we met $|t\rangle$ de toestand van het te kopieren systeem en met $|?\rangle$ de toestand van het systeem waarop we willen kopieren. Een ideaal kopieerapparaat zullen we na het kopieren weer terug kunnen brengen in de toestand $|A_0\rangle$, zonder dat we daarbij de eerder verkregen kopieen van $|t\rangle$ veranderen. Het kopieerproces, inclusief deze laatste stap, kunnen we dus schematisch opschrijven als

$$|A_0\rangle|t\rangle|?\rangle \to |A_0\rangle|t\rangle|t\rangle \tag{1}$$

In feite zou dit proces beschreven moeten worden met behulp van de Schrödingervergelijking, met een Hamiltoniaan die de interactie tussen het apparaat en de twee (andere) quantumsystemen beschrijft. Omdat de Schrödingervergelijking een *lineaire* differentiaalvergelijking is, moet gelden:

$$|A_0\rangle|c_1t_1 + c_2t_2\rangle|?\rangle \to c_1|A_0\rangle|t_1\rangle|t_1\rangle + c_2|A_0\rangle|t_2\rangle|t_2\rangle \tag{2}$$

Anderzijds moet ook gelden

$$| A_0 \rangle (c_1 | t_1 \rangle + c_2 | t_2 \rangle) | ? \rangle \to | A_0 \rangle (c_1 | t_1 \rangle + c_2 | t_2 \rangle)(c_1 | t_1 \rangle + c_2 | t_2 \rangle) \qquad (3)$$

anders zou ons apparaat geen echt kopieerapparaat zijn. **Opgave:** Vergelijk de rechterleden van de vergelijkingen (2) en (3). Laat zien dat deze in het algemeen niet gelijk zijn. Conclusie ?

e. We zouden natuurlijk ook een (niet bepaald ideaal) kopieerapparaat kunnen hebben dat na kopieren niet in de originele toestand kan worden teruggebracht. De eindtoestand van het apparaat hangt dan in principe af van de gekopieerde toestand. In dit geval zou het kopieerproces eruit zien als

$$| A_0 \rangle | t \rangle | ? \rangle \to | A_t \rangle | t \rangle | t \rangle \qquad (4)$$

Ook dit moet een lineair proces zijn. Kijk nu weer naar de toestanden $| t_1 \rangle$ en $| t_2 \rangle$. Als $| A_{t_1} \rangle = | A_{t_2} \rangle$ dan hebben we hetzelfde probleem als eerst (ga dit na). Welk probleem hebben we als $| A_{t_1} \rangle \neq | A_{t_2} \rangle$? Conclusie ?

Literatuur: W.K. Wootters en W.H. Zurek, *Nature 299, p. 802, 1982* (zie bijgevoegde kopie)

Opgave 3.3: Teleportatie

We hebben gezien dat het kopieren van quantumtoestanden niet mogelijk is. Wat wel mogelijk is (en zelfs al experimenteel gerealiseerd) is "teleportatie" van quantumtoestanden van een systeem naar een ander. In deze opgave zullen we een (schematisch) recept voor zo'n proces doorlopen.

Stel, twee experimentatoren, A(lice) and B(ob), hebben allebei een deeltje van een EPR-paar ter beschikking. Deze deeltjes (deeltje 1 en deeltje 2) zitten samen in de toestand $| \Psi^-_{12} \rangle$ uit opgave . Verder heeft A nog een extra deeltje (deeltje 3), dat zich in een nog onbekende toestand $| t_3 \rangle$ bevindt. We kunnen deze schrijven als

$$| t_3 \rangle = \alpha | \uparrow \rangle + \beta | \downarrow \rangle.$$

A wil de toestand $| t_3 \rangle$ graag aan B doorgeven en ze gaat dit doen met behulp van het gezamenlijke EPR-paar.

a. In analogie met de basis $\{| \Psi^{\pm}_{12}, \Phi^{\pm}_{12} \rangle\}$ voor de Hilbertruimte van de deeltjes 1 en 2 kunnen we een basis $\{| \Psi^{\pm}_{13}, \Phi^{\pm}_{13} \rangle\}$ voor de Hilbertruimte van de deeltjes 1 en 3 definieren. Door een meting van de gezamenlijke spin van 1 en 3 kan A het systeem op een van de toestanden van deze basis projecteren. Vragen: In welke toestanden kan het hele systeem zich na zo'n meting bevinden en met hoeveel kans in welke toestand ? In welke toestanden kan deeltje 2 (het deeltje bij B) zich na de meting bevinden ?

b. Als het goed is heb je bij het vorige onderdeel gevonden dat het deeltje bij B zich in vier verschillende toestanden kan bevinden, waarvan een de oorspronkelijke toestand van deeltje 3 is. Als A nu het resultaat van haar meting aan B stuurt, kan

B met behulp daarvan de oorspronkelijke toestand $|\, t_3 \rangle$ reconstueren door een unitaire transformatie los te laten op de toestand van zijn deeltje. Na afloop van de reconstructie is de teleportatie van de toestand $|\, t_3 \rangle$ van A naar B voltooid. Om een voorbeeld te geven: Stel dat het deeltje bij B na afloop van het experiment in de toestand $\alpha| \uparrow \rangle - \beta| \downarrow \rangle$ bevindt. We kunnen dze toestand representeren met de vector $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$. Deze vector kunnen we met behulp van een unitaire transformatie afbeelden op de vector $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ die bij de oorspronkelijke toestand $|\, t_3 \rangle$ hoort, namelijk als volgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Opgave: geef aan welke unitaire transformaties bij de reconstructie betrokken kunnen zijn en bij welke meetuitkomst (van A) ze horen

c. Geef aan waarom dit teleportatieproces niet kan worden gebruikt om informatie sneller dan het licht van de ene naar de andere plaats te brengen.

d. Stel nu dat A naast deeltje 1 in plaats van één extra deeltje, twee extra deeltjes heeft (deeltjes 3 en 4), die zich samen in een verstrengelde toestand bevinden, bijvoorbeeld in de toestand $|\, \Psi^+_{34} \rangle$. Wat kunnen we dan zeggen over de toestand van de deeltjes 2 en 4 na een gezamenlijke meting van 1 en 3 ?

Literatuur: Voor de theorie, zie C. H. Bennett, G. Brassard et al., *Phys. rev. lett. 70, p. 1895, 1993* (kopie bijgevoegd). Voor een experimentele realisatie, zie D. Bouwmeester, J. W. Pan et al. *Nature 390, p. 575, 1997* (kopie bijgevoegd). Voor een wat meer populairwetenschappelijk verhaal, zie b.v. *Natuur en Techniek nr. 9, p. 70-79, 1998.* (kopie bijgevoegd)