Opgaven Quantumfysica II, Week 10, 8 maart 2000

Inleveren voor maandag 13 maart 2000, 12.00 uur, bij de portier van de Diamantslijperij. Met vragen over stof en opgaven kun je terecht bij de werkcollegedocenten:

- *Alejandro Arrizabalaga (ITF kamer 333, tel. 5255006, arrizaba@wins.uva.nl)*
- *Joost Slingerland (ITF kamer 356, tel. 5255920, slinger@wins.uva.nl)*
- *Martijn Wubs (WZI kamer B045, tel 5255646, wubs@wins.uva.nl).*

Vermeld alstjeblieft de naam van je werkcollegedocent op het in te leveren werk. Succes !

Opgave 10.1 Spin

Voor een deeltje met spin $\frac{1}{2}$ kunnen we de spinoperatoren S_x, S_y en S_z schrijven als $\frac{1}{2}\hbar\sigma_x, \frac{1}{2}\hbar\sigma_y$ en $\frac{1}{2}\hbar\sigma_z$, met

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

De Hamiltoniaan voor een deeltje met spin $\frac{1}{2}$ in een magnetisch veld $\vec{B}$ is:

$$H = -\gamma \vec{B} \cdot \vec{\sigma}, \tag{2}$$

De reële constante γ wordt de "gyromagnetische verhouding" van het deeltje genoemd. We zijn er hier vanuitgegaan dat het deeltje ergens is "vastgelijmd," zodat we alle termen in de Hamiltoniaan die met de beweging van het deeltje door de ruimte te maken hebben kunnen verwaarlozen. Zie voor een wat uitgebreidere beschrijving van dit systeem bijvoorbeeld Griffiths, paragraaf 4.4.2. We beginnen in een situatie waarbij het magneetveld nul is. En het deeltje zit in een eigentoestand van de spinoperator S_x met eigenwaarde $+\frac{\hbar}{2}$.

a. Wat zijn de mogelijke uitkomsten als we de spin in de y-richting meten?

b. En wat zijn de mogelijke uitkomsten als we direct daarna weer de spin in de x-richting meten?

Bij deze laatste meting wordt weer de waarde $+\frac{\hbar}{2}$ gevonden. Direct na deze meting wordt een magneetveld van sterkte B in de z-richting aangelegd.

c. Bereken de toestand na een tijdje T.

d. Wat is de kans dat we daarna bij een meting van de spin in de x-richting weer de waarde $+\frac{\hbar}{2}$ vinden?

e. Wat is de verwachtingswaarde voor een meting van de spin in de y-richting?

Opgave 10.2: Statistiek

Deze opgave is bedoeld om je enigszins vertrouwd te maken met de statistiek van identieke quantumdeeltjes. Zie voor deze stof ook Griffiths, sectie 5.1.

Identieke quantumdeeltjes zijn *ononderscheidbaar,* in tegenstelling tot identieke deeltjes in de klassieke mechanica. Deze ononderscheidbaarheid heeft consequenties voor de golffuncties die zulke deeltjes beschrijven. Een golffunctie voor n identieke deeltjes kunnen we schrijven als een functie van de coordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ van de deeltjes:

$$\Psi_{n \text{ deeltjes}} = \Psi(x_1, \ldots x_n)$$

Omdat de deeltjes ononderscheidbaar zijn, mag het voor de fysyische eigenschappen van het systeem niet uitmaken als we de coordinaten van twee van de deeltjes verwisselen. De fysische eigenschappen van het systeem worden vastgelegd door de waarschijnlijkheidsdichtheid $|\Psi|^2(x_1, \ldots, x_n)$. We eisen dus:

$$(\forall i,j) : |\Psi|^2(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = |\Psi|^2(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) \tag{3}$$

a. Stel nu dat voor de golffunctie zelf het volgende geldt:

$$(\forall i,j) : \Psi(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \alpha\Psi(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots), \tag{4}$$

met α een constante. Leid uit (3) af dat $|\alpha|$ gelijk moet zijn aan 1. We eisen ook dat Ψ een welgedefinieerde functie van $(x_1, \ldots x_n)$ moet zijn. Laat zien dat hieruit volgt dat α gelijk is aan 1 of aan -1. In het eerste geval spreken we van identieke *bosonen,* in het tweede geval van identieke *fermionen.*[1]

Identieke bosonen hebben dus een *volledig symmetrische* golffunctie en identieke fermionen een *volledig antisymmetrische.* Het gedrag van de golffunctie onder verwisselingen blijkt bepalend te zijn voor de statistische eigenschappen van veeldeeltjessystemen. Vandaar dat er vaak over de *statistiek* van deeltjes wordt gesproken als men doelt op de eigenschappen van de golffunctie onder verwisselingen. Zowel bosonen als fermionen komen in de natuur voor. Het blijkt dat bosonen altijd heeltallige spin hebben, terwijl fermionen altijd halftallige spin hebben. Een deeltje met spin $\frac{1}{2}$ is dus altijd een fermion.

Stel nu, we hebben een systeem van twee identieke deeltjes, die elk een tweedimensionale Hilbertruimte hebben. Deze Hilbertruimte wordt opgespannen door de toestanden $|\,a\,\rangle$ en $|\,b\,\rangle$ met bijbehorende golffuncties ψ_a en ψ_b. Een willekeurige toestand $|\,\psi\,\rangle$ voor het systeem van twee deeltjes kan nu als volgt worden geschreven:

$$|\,\psi\,\rangle = C_{aa}|\,a\,\rangle|\,a\,\rangle + C_{ab}|\,a\,\rangle|\,b\,\rangle + C_{ba}|\,b\,\rangle|\,a\,\rangle + C_{bb}|\,b\,\rangle|\,b\,\rangle$$

of in termen van golffuncties:

$$\psi(x_1,x_2) = C_{aa}\psi_a(x_1)\psi_a(x_2) + C_{ab}\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + C_{ba}\psi_b(x_1)\psi_a(x_2) + C_{bb}\psi_b(x_1)\psi_b(x_2)$$

b. Geef drie lineair onafhankelijke toestanden van het tweedeeltjessysteem voor het geval de deeltjes identieke bosonen zijn.

c. Geef alle toegestane toestanden voor het geval de deeltjes identieke fermionen zijn. Merk op dat er geen (tweedeeltjes)toestanden bij zijn waarin de fermionen in dezelfde (eendeeltjes)toestand zijn. Dit is een manifestatie van het uitsluitingsprincipe van Pauli.

d. *(facultatief)* Hoeveel lineair onafhankelijke toestanden zijn er voor drie van zulke bosonen ? En voor drie van zulke fermionen ? Verandert de situatie voor de fermionen als we de dimensie van de eendeeltjes-Hilbertruimte vergroten ?

[1] Soms is het niet nodig te eisen dat de golffunctie een functie is op de ruimte van mogelijke posities van de deeltjes. Dit is met name het geval als er in deze ruimte gesloten lussen zijn die niet continu kunnen worden samengetrokken tot een punt. In zulke gevallen hebben we nog steeds $|\alpha| = 1$, maar niet meer per se $\alpha = \pm 1$. (Quasi)deeltjes met dit soort gedrag spelen een rol in de "tweedimensionale" fysica van dunne lagen, bijvoorbeeld in het quantum-Halleffect

Opgave 10.3: Fermionen en bosonen met spin

In opgave 10.1 hebben we berekend hoe de spin-golffunctie van een spin-$\frac{1}{2}$-deeltje verandert onder invloed van een magneetveld of ten gevolge van een meting. De ruimtelijke golffunctie kwam niet ter sprake in de beschrijving, want die was niet nodig om het (gedachten-)experiment te verklaren. In opgave 10.2 hebben we het niet over spin gehad. Daar werd duidelijk dat meerdeeltjes golffuncties van bosonen altijd symmetrisch moeten zijn onder verwisseling van de coördinaten van twee van die deeltjes, terwijl de meerdeeltjes golffuncties van fermionen anti-symmetrisch zijn onder die verwisseling.

Wat nog niet is benadrukt, is dat het argument in opgave 10.2 de *totale* golffunctie betreft van het veeldeeltjessysteem! (zie ook Griffiths pag. 185). De totale golffunctie bestaat uit een spin-deel en een ruimtelijk deel. Voor een enkel elektron is de totale toestand bijvoorbeeld te schrijven als

$$|\Psi\rangle = \alpha|\psi_+\rangle\chi_+ + \beta|\psi_-\rangle\chi_-. \tag{5}$$

(Je ziet: het spin-deel en het ruimtelijke deel van de eendeeltjestoestand kunnen dus verstrengeld zijn.) Als je met behulp van deze toestand voor één deeltje nu toestanden voor meerdere deeltjes wilt 'bouwen', dan moet je rekening houden met de extra eis dat de totale meerdeeltjestoestand voor elektronen anti-symmetrisch is.

Deze opgave bestaat uit drie delen. In het eerste deel verwaarlozen we de spin van de deeltjes. Dat kan bijvoorbeeld als we weten dat alle spins van alle deeltjes in je systeem hetzelfde zijn en de spin-toestanden symmetrisch zijn onder verwisseling. De vereiste symmetrie of anti-symmetrie van de totale toestand moet dan komen uit de (anti-)symmetrie van het ruimtelijke deel. In het tweede deel van de opgave gaan we na hoe we het spin-deel van van een twee-fermion-toestand kunnen schrijven in termen van eigentoestanden van de *totale* spin van de twee deeltjes. In het derde deel van de opgave combineren we de zojuist vergaarde kennis om totale tweedeeltjestoestanden (met zowel een ruimtelijk deel als een spin-deel) te construeren.

Nu eerst deel één. We beginnen met twee identieke deeltjes en verwaarlozen hun spin. Deze twee deeltjes hebben geen interactie en bevinden zich in een één-dimensionale harmonische potentiaal. In Griffiths paragraaf 2.3 staat de benodigde informatie; gebruik Griffiths' labelling van de ééndeeltjestoestanden á la vergelijking 2.50 op pagina 35.

a. Geef de laagste energietoestand en de bijbehorende energie voor geval de twee deeltjes bosonen zijn.

b. Geef de laagste energietoestand en de bijbehorende energie voor geval de twee deeltjes fermionen zijn.

Dat was deel één van de opgave: de conclusie moet zijn dat de grondtoestand van een meerdeeltjessysteem afhangt van de statistiek van de deeltjes! Nu in deel twee beperken we ons tot twee deeltjes en wel twee fermionen met spin 'n half. We gaan nu kijken hoe we spintoestanden van de afzonderlijke deeltjes kunnen combineren (optellen) tot spintoestanden van het totale systeem.

De spin-operatoren $S_i, S_i^z, S_i^\pm$ werken op de toestanden van deeltje i; $S_i^2|s_i, m_i\rangle = \hbar^2 s_i(s_i + 1)|s_i, m_i\rangle$. We kunnen nu ook spin-operatoren voor het twee-deeltjes-systeem definiëren, met de bijbehorende eigentoestanden:

$$\begin{aligned} S^2_{systeem} &= (S_1 + S_2)^2 \quad , \qquad & S^2_{systeem}|S, M\rangle &= \hbar^2 S(S+1)|S, M\rangle \\ S^z_{systeem} &= (S^z_1 + S^z_2) \quad , \qquad & S^z_{systeem}|S, M\rangle &= \hbar M|S, M\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

c. Wat zijn de mogelijke eigenwaarden M van $S^z_{systeem}$?

d. Beredeneer dat moet gelden: $|S = 1, M = 1 >= |m_1 = 1/2, m_2 = 1/2\rangle$.
   Merk op dat deze toestand symmetrisch is onder verwisseling van deeltje 1 en 2.

We definieren nu de operator $S^-_{systeem} = S^-_1 + S^-_2$ met:

$$S^-_1 |m_1\rangle = N|m_1 - 1\rangle,$$

waarbij N een normeringsconstante is. $S^-_{systeem}$ is dus een stapoperator voor spintoestanden van het systeem. Door deze operator herhaaldelijk op $|S = 1, M = 1\rangle$ te laten werken kunnen we de deelruimte vinden die wordt opgespannen door $\{|S = 1, M = 1\rangle; \ |S = 1, M = 0\rangle; \ |S = 1, M = -1\rangle\}$. (De procedure is geheel analoog aan onderdeel [l.] uit week 8, waar je eigentoestanden voor de tweedimensionale harmonische oscillator vond met behulp van een stapoperator.)

e. Voer de bovenbeschreven procedure uit en druk deze toestanden uit in lineaire combinaties van de $|m_1, m_2\rangle$ toestanden.

We hebben nu de deelruimte S=1 gevonden. (Analoog aan week 8: omdat $S^-_{systeem}$ commuteert met $S^2_{systeem}$, hebben alle spin-eigentoestanden in de deelruimte hetzelfde kwantumgetal S voor de totale spin!) Omdat de operator $S^2_{systeem}$ Hermitisch is, staat de deelruimte met S=0 (en dus M=0) loodrecht op de zojuist gevonden deelruimte.

f. Bepaal met bovenstaande hint de toestand $|S = 0, M = 0\rangle$ in termen van de eendeeltjes-spintoestanden. Controleer nu dat de twee deelruimtes de volledige Hilbertruimte opspannen.

Nu dan het derde deel van de opgave. In de onderdelen a. en b. hebben we uitgezocht hoe symmetrische en anti-symmetrische ruimtelijke tweedeeltjes-toestanden geconstrueerd kunnen worden. In de onderdelen c. t/m f. hebben we bestudeerd hoe spins van twee fermionen moeten worden opgeteld. Nu kunnen we deze resultaten combineren om mogelijke totale toestanden (ruimtelijk deel *plus* spin-deel) te bepalen:

g. Neem aan dat de twee deeltjes identieke fermionen zijn met spin $\frac{1}{2}$), in de ééndimensionale harmonische oscillator met een zo laag mogelijke energie. Geef de laagste energietoestand (plus de bijbehorende energie), als gegeven is dat het spin-deel van de toestand $|S = 0, M = 0\rangle$ is. Idem als het spin-toestand $|S = 1, M = 0\rangle$ is.

h. *(facultatief)* Neem weer aan dat de deeltjes identieke fermionen zijn in de één dimensionale harmonische oscillator, maar nu met een energie $E = 3\hbar\omega$. Geef de totale toestanden als de spin-toestand $|S = 0, M = 0\rangle$ is, en ook voor het geval dat het $|S = 1, M = 0\rangle$ is. Let op, er is in dit geval sprake van ontaarding.