Opgaven Quantumfysica II, Week 1, 14 december 1999

Inleveren voor maandag 10 januari 2000, 12.00 uur, bij de portier van de Diamantslijperij. Met vragen over stof en opgaven kun je terecht bij de werkcollegedocenten:

- *Alejandro Arrizabalaga (ITF kamer 333, tel. 5255006)*
- *Joost Slingerland (ITF kamer 356, tel. 5255920)*
- *Martijn Wubs (WZI kamer B045, tel 5255646).*

Succes !

Inleiding
De opgaven van deze week zijn bedoeld om een aantal belangrijke begrippen die in het college Quantumfysica I behandeld zijn weer onder de aandacht te brengen en om daarop voort te bouwen. Bij elke opgave staat een relevante paragraaf in het boek van Griffiths genoemd.

Opgave 1.1: De onzekere golfbal en het kerndeeltje.
Deze opgave gaat over het onzekerheidsprincipe van Heisenberg (zie Griffiths, paragraaf 1.6). In het college Quantumfysica II zullen wij zien hoe dit principe volgt uit het formalisme van de Quantummechanica (i.h.b. uit het feit dat de plaatsoperator niet met de impulsoperator commuteert). Deze opgave is bedoeld om enig gevoel voor de fysische gevolgen van de onzekerheidsrelatie aan te kweken

a. We beschouwen een golfbal met een massa $m = 50$ g die zich met een snelheid van $v = 200$ km/ uur boven Aerdenhout voortbeweegt. De meetnauwkeurigheid is 0.01 m/s en we laten de onnauwkeurigheid in m buitenbeschouwing. Hoe groot is de minimale onzekerheid in positie t.g.v. van de kwantummechanische beginselen?

b. Met de onzekerheidsrelatie voor plaats en impuls kun je ook een (zeer ruwe) schatting maken van de grootte van kernpotentialen. Gegeven dat de kernpotentiaal ervoor zorgt dat een nucleon zich ergens binnen een gebiedje met een diameter van 10^{-15} m bevindt. Wat is dan de minimale onzekerheid in de impuls? Neem nu aan dat de grootte van de impuls van dezelfde orde is als de zojuist berekende impulsonzekerheid. Bereken (in eV) hoe sterk de kernpotentiaal minimaal moet zijn om te voorkomen dat het nucleon de kern verlaat.

Opgave 1.2: Meten, kans, en verwachtingswaarden.
Een van de opvallende verschillen tussen de klassieke natuurkunde en de en quantummechanica is de rol van de meting in een experiment. In de quantummechanica zijn meetuitkomsten vaak *gequantiseerd*, dat wil zeggen dat er slechts bepaalde discrete meetuitkomsten mogelijk zijn. Verder beïnvloedt in de quantummechanica het doen van een meting de uitkomsten van latere metingen. Dit is een van de postulaten van de quantummechanica.
De nog tamelijk vage opmerkingen hierboven kunnen concreter worden geformuleerd met behulp van golffuncties en operatoren. De golffunctie $\Psi(x,t)$ beschrijft de toestand van het systeem. De dingen die gemeten zouden kunnen worden ('observabelen') A, B, enz. corresponderen met operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, enz.
De mogelijke uitkomsten van een nauwkeurige meting van A zijn de eigenwaarden van de operator $\hat{A}$. De eigenwaarden zijn de oplossingen λ van de eigenwaardenvergelijking

$\hat{A}\phi(x) = \lambda\phi(x)$. Bij iedere eigenwaarde λ hoort een golffunctie (de eigenfunctie) $\phi_\lambda(x)$. Als je een meting doet en de uitkomst is λ, dan wordt de golffunctie $\Psi(x,t)$ onmiddelijk gelijk aan de eigenfunctie die bij die uitkomst hoort, namelijk $\phi_\lambda(x)$. Dit wordt "de ineenstorting van de golffunctie" genoemd; ook dit is een postulaat van de quantummechanica. We zullen het bovenstaande nu illustreren aan de hand van een bekend voorbeeld, een deeltje in een potentiaalput met ondoordringbare wanden in één dimensie (zie Griffiths, paragraaf 2.2). De potentiaal voor dit systeem is

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < L \\ \infty & \text{anders} \end{cases} \tag{1}$$

De energie van het deeltje (een observabele) correspondeert met de operator $\hat{H}$, de Hamiltoniaan.

a. Geef de eigenwaarden λ en de bijbehorende eigenfuncties ψ_λ van de operator $\hat{H}$. Wat herken je in deze eigenwaarden?

Op $t = 0$ bevindt het deeltje zich in de toestand $\Psi(x) = \sin(\pi x/L) + \sin(3\pi x/L)$. ($\Psi$ is niet genormaliseerd.)

b. Bereken de verwachtingswaarde van de energie.

Hint: voor natuurlijke getallen m,n geldt:

$$\int_0^L sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} L/2 & \text{als } m = n \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \tag{2}$$

c. Wat zijn de mogelijke uitkomsten van een meting van de energie van het deeltje, en de bijbehorende kansen?

d. Stel we meten de energie van het deeltje. De uitkomst blijkt $\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ te zijn. Wat zijn de mogelijke uitkomsten als we direct daarna de energie van het deeltje opnieuw meten?